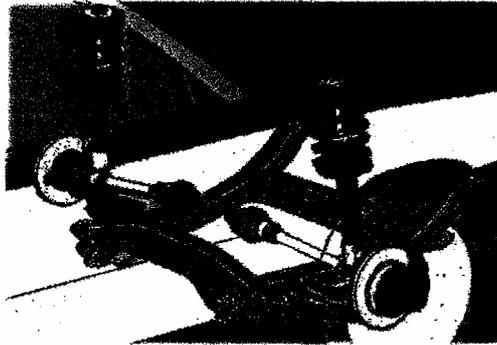


P. Agati Y. Brémont G. Delville

DEUG TI • IUT • STS

Mécanique du solide

Applications industrielles



DUNOD

N° 03

1 □ cinétique

La cinétique se construit à partir de la cinématique en introduisant la notion de masse. Les définitions et les résultats, que nous allons mettre en place serviront à écrire le principe fondamental de la dynamique qui sera énoncé au *chapitre 2*, ainsi que le théorème de l'énergie cinétique qui sera démontré au *chapitre 3*.

1. PRINCIPE DE CONSERVATION DE LA MASSE

En mécanique classique (celle que l'on étudie) on admet le principe de conservation de la masse.

1.1. DÉFINITION

Un ensemble matériel (E) vérifie le principe de conservation de la masse, si tout sous-ensemble matériel (e) de l'ensemble matériel (E) a une masse $m(e)$ constante au cours du temps, soit

$$\forall (e) \subset (E), \forall t \quad m(e) = \text{constante.}$$

REMARQUE

En mécanique relativiste la masse d'un ensemble matériel est une fonction du temps.

1.2. CONSÉQUENCE : DÉRIVATION SOUS LE SIGNE SOMME

Soit (E) un ensemble matériel en mouvement par rapport à un repère R.

Soit $\vec{\varphi}(P, t)$ un champ de vecteurs défini, à chaque date t , en tout point P de (E) relativement à la mesure de masse dm du point P considéré.

Considérons la résultante générale du torseur associé à ce champ de vecteurs :

$$\int_{P \in E} \vec{\varphi}(P, t) dm.$$

Si l'on suppose la fonction $\vec{\varphi}(P, t)$ continuellement différentiable par rapport à la variable t , on écrit compte tenu du principe de conservation de la masse :

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{P \in E} \vec{\varphi}(P, t) dm \right]_R = \int_{P \in E} \left[\frac{d}{dt} \vec{\varphi}(P, t) \right]_R dt$$

Nous utiliserons cette relation dans les paragraphes qui suivent avec des vecteurs position, des vecteurs vitesse, etc.

2. TORSEUR CINÉTIQUE

Soit un ensemble matériel (E) de masse m , de centre d'inertie G, en mouvement par rapport au repère R.

2.1. DÉFINITION

Le torseur cinétique de l'ensemble matériel dans son mouvement par rapport au repère en un point A quelconque, le torseur suivant

$$\{C(E/R)\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \int_{P \in E} \vec{V}(P/R) dm \\ \int_{P \in E} \overline{AP} \wedge \vec{V}(P/R) dm \end{array} \right.$$

La résultante générale du torseur cinétique est appelée *résultante cinétique* (ou quantité de mouvement) et le moment résultant est appelé *moment cinétique*.

Le moment cinétique au point A du torseur $\{C(E/R)\}$ est noté habituellement : $\vec{\sigma}_A(E/R)$

2.2. AUTRE EXPRESSION DE LA RÉSULTANTE CINÉTIQUE

Soit O l'origine du repère R . La position du centre d'inertie G de l'ensemble matériel (E) est donnée par la relation (voir paragraphe 2 du chapitre 1 de statique)

$$m\overline{OG} = \int_{P \in E} \overline{OP} dm.$$

Dérivons les deux membres de cette égalité par rapport à t , dans R

$$\left[\frac{d}{dt} (m\overline{OG}) \right]_R = \frac{d}{dt} \left[\int_{P \in E} \overline{OP} dm \right]_R.$$

Compte tenu du principe de conservation de la masse et de la relation (1), on peut écrire :

$$m \left[\frac{d}{dt} \overline{OG} \right]_R = \int_{P \in E} \left[\frac{d}{dt} \overline{OP} \right]_R dm$$

soit

$$m\overline{V}(G/R) = \int_{P \in E} \overline{V}(P/R) dm. \quad (2)$$

Le torseur cinétique s'écrit donc

$$\{C(E/R)\} = \begin{Bmatrix} m\overline{V}(G/R) \\ \overline{\sigma}_A(E/R) \end{Bmatrix}.$$

2.3. REMARQUES

— Si on suppose la masse de l'ensemble matériel (E) concentrée en son centre d'inertie G , le torseur cinétique s'écrit au point G :

$$\{C(E/R)\} = \begin{Bmatrix} m\overline{V}(G/R) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}.$$

Cette hypothèse simplificatrice est acceptable ou non suivant la nature du mouvement de (E) . Par exemple, une bille dont on étudie le mouvement de chute libre sera modélisée par un point matériel, ce qui est exclu pour l'étude de son roulement sans glissement sur un plan incliné.

— Vérifions que les deux éléments de réduction du torseur cinétique qui ont été définis en 2.1 constituent bien un torseur.

Pour cela, il suffit de montrer que le moment cinétique vérifie la relation de changement de point du moment d'un torseur.

Soit B un point quelconque. Par définition

$$\overline{\sigma}_B(E/R) = \int_{P \in E} \overline{BP} \wedge \overline{V}(P/R) dm$$

avec $\overline{BP} = \overline{BA} + \overline{AP}$, on obtient

$$\overline{\sigma}_B(E/R) = \int_{P \in E} \overline{BA} \wedge \overline{V}(P/R) dm + \int_{P \in E} \overline{AP} \wedge \overline{V}(P/R) dm$$

\overline{BA} étant indépendant de (E) , la première intégrale est égale à :

$$\overline{BA} \wedge \int_{P \in E} \overline{V}(P/R) dm$$

soit avec la relation (2) : $\overline{BA} \wedge m\overline{V}(G/R)$.

La deuxième intégrale représente le moment cinétique $\overline{\sigma}_A(E/R)$.

D'où la relation :

$$\overline{\sigma}_B(E/R) = \overline{\sigma}_A(E/R) + m\overline{V}(G/R) \wedge \overline{AB}. \quad (3)$$

3. TORSEUR DYNAMIQUE

3.1. DÉFINITION

Le torseur dynamique de l'ensemble matériel (E) dans son mouvement par rapport au repère R est, en un point A quelconque, le torseur suivant :

$$\{D(E/R)\} = \begin{Bmatrix} \int_{P \in E} \overline{\Gamma}(P/R) dm \\ \int_{P \in E} \overline{AP} \wedge \overline{\Gamma}(P/R) dm \end{Bmatrix}$$

La résultante générale du torseur dynamique est appelée *résultante dynamique* et le moment résultant est appelé *moment dynamique*.

Le moment dynamique au point A du torseur $\{D(E/R)\}$ est noté habituellement : $\overline{\delta}_A(E/R)$.

3.2. AUTRE EXPRESSION DE LA RÉSULTANTE DYNAMIQUE

Nous avons établi au paragraphe 2.2 la relation (2) suivante :

$$m\overline{V}(G/R) = \int_{P \in E} \overline{V}(P/R) dm$$

dérivons les deux membres de cette égalité par rapport à t , dans R .

$$\left[\frac{d}{dt} m\overline{V}(G/R) \right]_R = \frac{d}{dt} \left[\int_{P \in E} \overline{V}(P/R) dm \right]_R$$

compte tenu du principe de conservation de la masse et de la relation (1), on peut écrire :

$$m \left[\frac{d}{dt} \overline{V}(G/R) \right]_R = \int_{P \in E} \left[\frac{d}{dt} \overline{V}(P/R) \right]_R dm$$

soit

$$m\overline{\Gamma}(G/R) = \int_{P \in E} \overline{\Gamma}(P/R) dm.$$

Le torseur dynamique s'écrit donc :

$$\{D(E/R)\} = \begin{Bmatrix} m\overline{\Gamma}(G/R) \\ \overline{\delta}_A(E/R) \end{Bmatrix}$$

3.3. REMARQUES

Si on suppose la masse de l'ensemble matériel (E) concentrée en son centre d'inertie G, le torseur dynamique s'écrit au point G :

$$\{\mathcal{D}(E/R)\}_G = \begin{Bmatrix} m\vec{\Gamma}(G/R) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

— Comme pour le torseur cinétique on vérifie facilement que les deux éléments de réduction du torseur dynamique définis en 3.1 constituent bien un torseur. C'est-à-dire que l'on a la relation :

$$\vec{\delta}_B(E/R) = \vec{\delta}_A(E/R) + m\vec{\Gamma}(G/R) \wedge \vec{AB}. \quad (4)$$

4. RELATION ENTRE LE MOMENT CINÉTIQUE ET LE MOMENT DYNAMIQUE

Plutôt que de conduire un calcul direct du moment dynamique nécessitant la connaissance du champ des accélérations, il est souvent plus simple de déduire le moment dynamique du moment cinétique (le calcul des vitesses est toujours plus simple que celui des accélérations). C'est pourquoi nous allons mettre en évidence la relation qui unit ces deux moments.

Le moment cinétique, en un point A quelconque, de l'ensemble matériel (E) dans son mouvement par rapport au repère R, est par définition :

$$\vec{\sigma}_A(E/R) = \int_{P \in E} \vec{AP} \wedge \vec{V}(P/R) dm.$$

Dérivons les deux membres de cette égalité par rapport à t, dans R, en utilisant la relation (1).

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_A(E/R) \right]_R = \int_{P \in E} \left[\frac{d}{dt} (\vec{AP} \wedge \vec{V}(P/R)) \right]_R dm \quad (5)$$

or

$$\left[\frac{d}{dt} (\vec{AP} \wedge \vec{V}(P/R)) \right]_R = \left[\frac{d}{dt} \vec{AP} \right]_R \wedge \vec{V}(P/R) + \vec{AP} \wedge \left[\frac{d}{dt} \vec{V}(P/R) \right]_R$$

et

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{AP} \right]_R = \left[\frac{d}{dt} \vec{OP} \right]_R - \left[\frac{d}{dt} \vec{OA} \right]_R$$

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{AP} \right]_R = \vec{V}(P/R) - \vec{V}(A/R)$$

alors

$$\left[\frac{d}{dt} (\vec{AP} \wedge \vec{V}(P/R)) \right]_R = -\vec{V}(A/R) \wedge \vec{V}(P/R) + \vec{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R).$$

Par conséquent, la relation (5) devient

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_A(E/R) \right]_R = - \int_{P \in E} \vec{V}(A/R) \wedge \vec{V}(P/R) dm + \int_{P \in E} \vec{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R) dm$$

La première intégrale s'écrit :

$$-\vec{V}(A/R) \wedge \int_{P \in E} \vec{V}(P/R) dm$$

soit

$$-\vec{V}(A/R) \wedge m\vec{V}(G/R).$$

La deuxième intégrale représente le moment cinétique $\vec{\delta}_A(E/R)$.

En définitive, on obtient la relation suivante

$$\vec{\delta}_A(E/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_A(E/R) \right]_R + m\vec{V}(A/R) \wedge \vec{V}(G/R)$$

REMARQUE

Cette relation est valable pour un point quelconque de l'ensemble matériel (E) quelconques. Par conséquent le vecteur vitesse $\vec{V}(A/R)$ est unique à $\left[\frac{d}{dt} \vec{OA} \right]_R$.

Cas particuliers

Distinguons deux cas particuliers où le vectoriel de la relation précédente est nul

Premier cas : A est fixe dans R, alors :

$$\vec{\delta}_A(E/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_A(E/R) \right]_R.$$

Deuxième cas : A est confondu avec G,

$$\vec{\delta}_G(E/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_G(E/R) \right]_R.$$

5. ÉNERGIE CINÉTIQUE

Définition

L'énergie cinétique de l'ensemble matériel dans son mouvement par rapport au repère scalaire positif suivant :

$$T(E/R) = \frac{1}{2} \int_{P \in E} [\vec{V}(P/R)]^2 dm.$$

6. APPLICATION

Considérons un pendule simple constitué d'un rectiligne (S) de longueur l, d'épaisseur négligeable, homogène, de masse m et de centre d'inertie G

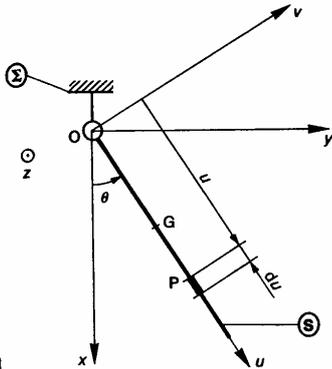


Fig. 1

Soit $R(O, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ un repère lié à un bâti (Σ) . La tige (S) a une liaison pivot d'axe (O, \hat{z}) avec (Σ) .
 Soit $R_1(O, \hat{u}, \hat{v}, \hat{z})$ un repère lié à la tige (S) tel que :
 $\overline{OG} = \frac{l}{2} \hat{u}$.
 On pose : $\theta = (\hat{z}, \hat{u})$.

QUESTION 1

Déterminer le torseur cinétique, au point O, de la tige (S) dans son mouvement par rapport au repère R.

RÉPONSE

Le torseur cinétique de (S) dans son mouvement par rapport à R s'écrit au point O :

$$\{C(S/R)\} = \begin{Bmatrix} m\overline{V}(G/R) \\ \sigma_0(S/R) \end{Bmatrix}$$

Calcul de la résultante cinétique

Le vecteur vitesse $\overline{V}(G/R)$ est égal à $\left[\frac{d}{dt} \overline{OG}\right]_R$ soit

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{l}{2} \hat{u}\right]_R$$

Pour effectuer ce calcul passons par l'intermédiaire de la base de R_1 :

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{l}{2} \hat{u}\right]_R = \left[\frac{d}{dt} \frac{l}{2} \hat{u}\right]_{R_1} + \overline{\Omega}(R_1/R) \wedge \frac{l}{2} \hat{u}$$

\hat{u} étant un vecteur unitaire de la base de R_1 :

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{l}{2} \hat{u}\right]_{R_1} = \dot{\theta} \hat{z} \wedge \frac{l}{2} \hat{u}$$

par suite $\overline{V}(G/R) = \frac{l}{2} \theta' \hat{v}$

et

$$m\overline{V}(G/R) = \frac{ml}{2} \theta' \hat{v}$$

Calcul du moment cinétique au point O

$$\sigma_0(S/R) = \int_{P \in S} \overline{OP} \wedge \overline{V}(P/R) dm$$

Posons $\overline{OP} = u\hat{u}$.

Par un calcul analogue à celui de $\overline{V}(G/R)$ on montre que $\overline{V}(P/R) = u\theta' \hat{v}$, alors

$$\sigma_0(S/R) = \int_{P \in S} u\hat{u} \wedge u\theta' \hat{v} dm$$

avec $\hat{u} \wedge \hat{v} = \hat{z}$

$$\sigma_0(S/R) = \theta' \hat{z} \int_{P \in S} u^2 dm$$

sachant que $dm = \frac{m}{l} du$ ($\frac{m}{l}$: masse linéique de tige) :

$$\sigma_0(S/R) = \frac{m}{l} \theta' \hat{z} \int_0^l u^2 du$$

soit

$$\sigma_0(S/R) = \frac{ml^2}{3} \theta' \hat{z}$$

REMARQUE

Dans l'expression de $\sigma_0(S/R)$ apparaît le terme $\frac{ml^2}{3}$ qui représente le moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe (O, \hat{z}) (voir cours de terminale).

QUESTION 2

Déterminer le torseur dynamique, au point O, de la tige (S) dans son mouvement par rapport au repère R.

RÉPONSE

Le torseur dynamique de (S) dans son mouvement par rapport à R s'écrit au point O.

$$\{D(S/R)\} = \begin{Bmatrix} m\overline{\Gamma}(G/R) \\ \delta_0(S/R) \end{Bmatrix}$$

Calcul de la résultante dynamique

Le vecteur accélération $\overline{\Gamma}(G/R)$ est égal à $\left[\frac{d}{dt} \overline{V}(G/R)\right]_R$

$$\text{soit } \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{l}{2} \theta' \hat{v}\right)\right]_R$$

Pour effectuer ce calcul passons par l'intermédiaire de la base de R_1 .

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{l}{2} \theta' \hat{v}\right)\right]_R = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{l}{2} \theta' \hat{v}\right)\right]_{R_1} + \overline{\Omega}(R_1/R) \wedge \frac{l}{2} \theta' \hat{v}$$

\hat{v} étant un vecteur unitaire de la base de R_1 :

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{l}{2} \theta' \hat{v}\right)\right]_{R_1} = \frac{l}{2} \theta'' \hat{v} + \theta' \hat{z} \wedge \frac{l}{2} \theta' \hat{v}$$

par suite $\overline{\Gamma}(G/R) = \frac{l}{2} \theta'' \hat{v} - \frac{l}{2} \theta'^2 \hat{u}$ et

$$m\overline{\Gamma}(G/R) = \frac{ml}{2} (\theta'' \hat{v} - \theta'^2 \hat{u})$$

Calcul du moment dynamique au point O

La relation (6) du paragraphe 4 entre le moment cinétique et le moment dynamique s'écrit au point O, fixe dans R :

$$\delta_0(S/R) = \left[\frac{d}{dt} \sigma_0(S/R)\right]_R$$

sachant que : $\vec{\sigma}_O(S/R) = \frac{ml^2}{3} \theta' \vec{z}$

$$\vec{\delta}_O(S/R) = \frac{ml^2}{3} \theta'' \vec{z}$$

QUESTION 3

Déterminer l'énergie cinétique de la tige (S) dans son mouvement par rapport à R.

RÉPONSE

Par définition l'énergie cinétique de (S) dans son mouvement par rapport à R est :

$$T(S/R) = \frac{1}{2} \int_{P \in S} [\vec{V}(P/R)]^2 dm$$

avec $\vec{V}(P/R) = u\theta' \vec{v}$ et en remarquant que $\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2 = 1$

$$T(S/R) = \frac{\theta'^2}{2} \int_{P \in S} u^2 dm$$

sachant que $dm = \frac{m}{l} du$

$$T(S/R) = \frac{m\theta'^2}{2l} \int_0^l u^2 du$$

soit

$$T(S/R) = \frac{ml^2}{6} \theta'^2$$

REMARQUE

Dans l'expression de $T(S/R)$ apparaît le moment d'inertie $\frac{ml^2}{3}$ de (S) par rapport à l'axe (O, \vec{z}) .

7. REMARQUES

— Les définitions et les relations mises en place jusqu'à présent sont applicables à un ensemble matériel quelconque (solide, ensemble de solides, liquide, gaz, etc.).

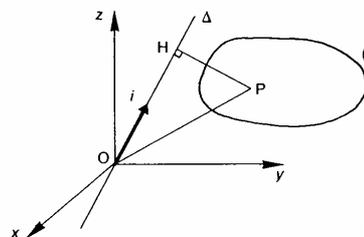
— L'exercice précédent (paragraphe 6) montre que dans le calcul du moment cinétique et de l'énergie cinétique du solide (S), dans son mouvement particulier par rapport au repère R, apparaît le moment d'inertie de ce solide par rapport à l'axe (O, \vec{z}) .

Lorsqu'un solide a un mouvement quelconque par rapport à un repère, d'autres termes d'inertie apparaissent dans le calcul du moment cinétique et de l'énergie cinétique. C'est pourquoi nous allons maintenant définir complètement les caractéristiques d'inertie d'un solide, et établir ensuite des relations particulières pour déterminer le moment cinétique et l'énergie cinétique d'un solide.

8. MOMENT D'INERTIE D'UN SOLIDE PAR RAPPORT A UN AXE

Soient un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et un axe $\Delta(O$ d'origine O et de vecteur unitaire \vec{i} . Posons :

$$\vec{i} = \alpha \vec{x} + \beta \vec{y} + \gamma \vec{z}$$



Soit (S) un solide de masse m . Notons P un quelconque de (S) et H le pied de la perpendiculaire abaissée de P sur Δ . Posons :

$$\vec{OP} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$$

8.1. DÉFINITION

Le moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe Δ est le scalaire positif suivant :

$$I(S/\Delta) = \int_{P \in S} [\vec{PH}]^2 dm$$

8.2. CALCUL DE $I(S/\Delta)$

Pour calculer ce moment d'inertie remarquons

$$\|\vec{i} \wedge \vec{OP}\| = \|\vec{i}\| \cdot \|\vec{OP}\| \cdot |\sin(\vec{i}, \vec{OP})|$$

comme \vec{i} est un vecteur unitaire, et que dans le triangle rectangle OPH :

$$\|\vec{PH}\| = \|\vec{OP}\| \cdot |\sin(\vec{i}, \vec{OP})|$$

Alors $\|\vec{PH}\| = \|\vec{i} \wedge \vec{OP}\|$.

Déterminons dans la base de R les composantes du vecteur $\vec{i} \wedge \vec{OP}$, en utilisant une notation class

$$\vec{i} \wedge \vec{OP} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta z - \gamma y \\ \gamma x - \alpha z \\ \alpha y - \beta x \end{vmatrix}$$

Alors

$$[\vec{PH}]^2 = (\beta z - \gamma y)^2 + (\gamma x - \alpha z)^2 + (\alpha y - \beta x)^2$$

Soit

$$[\vec{PH}]^2 = \alpha^2(y^2 + z^2) + \beta^2(z^2 + x^2) + \gamma^2(x^2 + y^2) - 2\beta\gamma yz - 2\gamma\alpha zx - 2\alpha\beta xy$$

Par conséquent, le moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe Δ s'écrit, en remarquant que α , β , γ sont indépendants des points P de (S) :

$$I(S/\Delta) = \alpha^2 \int_{P \in S} (y^2 + z^2) dm + \beta^2 \int_{P \in S} (z^2 + x^2) dm \\ + \gamma^2 \int_{P \in S} (x^2 + y^2) dm - 2\beta\gamma \int_{P \in S} yz dm \\ - 2\gamma\alpha \int_{P \in S} zx dm - 2\alpha\beta \int_{P \in S} xy dm.$$

On pose habituellement :

$$A = \int_{P \in S} (y^2 + z^2) dm \quad B = \int_{P \in S} (z^2 + x^2) dm$$

$$C = \int_{P \in S} (x^2 + y^2) dm \quad D = \int_{P \in S} yz dm$$

$$E = \int_{P \in S} zx dm \quad F = \int_{P \in S} xy dm.$$

Alors

$$I(S/\Delta) = \alpha^2 A + \beta^2 B + \gamma^2 C - 2\beta\gamma D \\ - 2\gamma\alpha E - 2\alpha\beta F.$$

8.3. DÉFINITIONS

On appelle :

A : moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe (O, \vec{x}) .

B : moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe (O, \vec{y}) .

C : moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe (O, \vec{z}) .

D : produit d'inertie de (S) par rapport aux axes (O, \vec{y}) et (O, \vec{z}) .

E : produit d'inertie de (S) par rapport aux axes (O, \vec{z}) et (O, \vec{x}) .

F : produit d'inertie de (S) par rapport aux axes (O, \vec{x}) et (O, \vec{y}) .

REMARQUE

Si le point O et la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ sont fixes par rapport au solide (S), les quantités A, B, C, D, E, F sont constantes au cours du temps.

9. OPÉRATEUR D'INERTIE D'UN SOLIDE

Dans ce paragraphe nous allons définir un opérateur qui va nous permettre de rassembler les 6 quantités A, B, C, D, E, F dans une matrice symétrique 3×3 .

9.1. DÉFINITION

L'opérateur d'inertie d'un solide (S) en un point O, est l'opérateur qui à tout vecteur \vec{u} fait correspondre le vecteur :

$$\vec{J}_O(S, \vec{u}) = \int_{P \in S} \overline{OP} \wedge (\vec{u} \wedge \overline{OP}) dm.$$

Cet opérateur est linéaire, donc représentable par une matrice.

9.2. MATRICE D'INERTIE

La matrice d'inertie du solide (S) au point O, relativement à la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, s'obtient en disposant en colonnes les composantes des vecteurs transformés des vecteurs de base par l'opérateur d'inertie.

$$[I_0(S)] = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$$\vec{J}_O(S, \vec{x}) \quad \vec{J}_O(S, \vec{y}) \quad \vec{J}_O(S, \vec{z})$$

Déterminons la première colonne de la matrice d'inertie. Ses trois termes sont les composantes du vecteur :

$$\vec{J}_O(S, \vec{x}) = \int_{P \in S} \overline{OP} \wedge (\vec{x} \wedge \overline{OP}) dm.$$

Posons

$$\overline{OP} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$$

alors

$$\vec{x} \wedge \overline{OP} = \begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & y & -z \\ 0 & z & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -z & y \end{vmatrix}$$

et

$$\overline{OP} \wedge (\vec{x} \wedge \overline{OP}) = \begin{vmatrix} x & 0 & y^2 + z^2 \\ y & -z & -xy \\ z & y & -zx \end{vmatrix}$$

La première colonne est donc constituée des termes :

$$\int_{P \in S} (y^2 + z^2) dm, \quad - \int_{P \in S} xy dm, \quad - \int_{P \in S} zx dm.$$

Après un calcul identique pour déterminer les deux autres colonnes, la matrice d'inertie s'écrit avec les notations du paragraphe 8 :

$$[I_0(S)] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

REMARQUES

- Les moments d'inertie du solide (S) par rapport aux axes (O, \vec{x}) , (O, \vec{y}) et (O, \vec{z}) apparaissent sur la diagonale de la matrice.
- L'opérateur d'inertie est symétrique.

9.3. EXPRESSION DU MOMENT D'INERTIE D'UN SOLIDE PAR RAPPORT A UN AXE

Nous avons vu au *paragraphe 8* que le moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe $\Delta(O, \vec{i})$ était (relation 9) :

$$I(S/\Delta) = \int_{P \in S} [\overline{PH}]^2 dm.$$

Soit avec $\|\overline{PH}\| = \|\vec{i} \wedge \overline{OP}\|$ (relation 10)

$$I(S/\Delta) = \int_{P \in S} [\vec{i} \wedge \overline{OP}]^2 dm.$$

En écrivant que le carré scalaire $[\vec{i} \wedge \overline{OP}]^2$ est égal au produit scalaire du vecteur $(\vec{i} \wedge \overline{OP})$ par lui-même, on obtient :

$$I(S/\Delta) = \int_{P \in S} (\vec{i} \wedge \overline{OP}) \cdot (\vec{i} \wedge \overline{OP}) dm.$$

En considérant que l'expression à intégrer est un produit mixte constitué des trois vecteurs \vec{i} , \overline{OP} et $\vec{i} \wedge \overline{OP}$, on peut écrire en permutant les signes scalaire et vectoriel de ce produit mixte :

$$I(S/\Delta) = \vec{i} \cdot \int_{P \in S} \overline{OP} \wedge (\vec{i} \wedge \overline{OP}) dm.$$

Ce qui fait apparaître l'opérateur d'inertie du solide (S), au point O, appliqué au vecteur \vec{i} . D'où :

$$I(S/\Delta) = \vec{i} \cdot \vec{J}_O(S, \vec{i}). \tag{11}$$

9.4. APPLICATION

Soit une tige rectiligne (S) de longueur l , de dimensions transversales négligeables, homogène, de masse m et de centre d'inertie G.

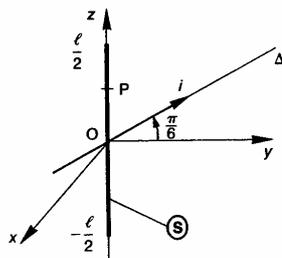


Fig. 3

$R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est un repère dont l'origine O est en dont l'axe (O, \vec{z}) est confondu avec l'axe de la tige. Soit $\Delta(O, \vec{i})$ l'axe d'origine O et de vecteur unitaire que $\vec{i} = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{y} + \frac{1}{2} \vec{z}$.

QUESTION 1

Déterminer l'opérateur d'inertie de la tige (S) au p

RÉPONSE

Déterminons l'opérateur d'inertie de (S) au point O matrice d'inertie au point O, relativement à $\mathcal{R}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Cette matrice est de la forme :

$$[I_O(S)] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Sachant qu'un point P quelconque de la tige (S) coordonnées cartésiennes $(0, 0, z)$ dans \mathcal{R} :

$$A = \int_{P \in S} (y^2 + z^2) dm = \int_{P \in S} z^2 dm$$

$$B = \int_{P \in S} (z^2 + x^2) dm = \int_{P \in S} z^2 dm = A$$

$$C = \int_{P \in S} (x^2 + y^2) dm = 0$$

$$D = \int_{P \in S} yz dm = 0$$

$$E = \int_{P \in S} zx dm = 0$$

$$F = \int_{P \in S} xy dm = 0.$$

Calculons A :

$$A = \int_{P \in S} z^2 dm$$

avec $dm = \frac{m}{l} dz$ ($\frac{m}{l}$: masse linéique de S)

$$A = \frac{m}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} z^2 dz,$$

soit

$$A = \frac{ml^2}{12}$$

la matrice d'inertie est donc :

$$[I_O(S)] = \begin{bmatrix} \frac{ml^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

QUESTION 2

Déterminer le moment d'inertie de la tige (S) par à l'axe $\Delta(O, \vec{i})$.

RÉPONSE

Ce moment d'inertie est donné par la relation (11)

$$I(S/\Delta) = \vec{i} \cdot \vec{J}_O(S, \vec{i}).$$

La matrice colonne associée au vecteur $\vec{J}_O(S, \vec{i})$ s'obtient en effectuant la multiplication de la matrice d'inertie par la matrice colonne associée au vecteur unitaire \vec{i} :

$$[\vec{J}_O(S, \vec{i})] = \begin{bmatrix} \frac{ml^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{ml^2\sqrt{3}}{24} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe $\Delta(O, \vec{i})$ est égal au produit scalaire du vecteur unitaire \vec{i} par le vecteur $\vec{J}_O(S, \vec{i})$.

D'où

$$I(S/\Delta) = \frac{ml^2}{16}$$

10. BASE PRINCIPALE D'INERTIE

L'opérateur d'inertie étant symétrique possède un système de trois vecteurs propres orthogonaux deux à deux.

Par conséquent, il existe toujours, en tout point, au moins une base orthonormée directe, appelée *base principale d'inertie*, dans laquelle la matrice d'inertie est diagonale (produits d'inertie nuls).

REMARQUE

Chaque vecteur unitaire de la base principale d'inertie a même direction qu'un des vecteurs propres.

Soit, par exemple, $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ la base principale d'inertie de l'opérateur d'inertie du solide (S) au point O. Dans cette base la matrice d'inertie est de la forme :

$$[I_O(S)] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

10.1. DÉFINITIONS

— Les axes (O, \vec{x}_1) , (O, \vec{y}_1) et (O, \vec{z}_1) sont appelés *axes principaux d'inertie* du solide (S) au point O.

— Les moments d'inertie A_1 , B_1 et C_1 sont appelés *moments principaux d'inertie* du solide (S) au point O.

REMARQUE

Les moments principaux d'inertie sont les valeurs propres de l'opérateur d'inertie.

10.2. SYMÉTRIES MATÉRIELLES DU SOLIDE

Pour mettre en évidence a priori une base principale d'inertie, ou tout au moins avoir une matrice d'inertie la plus simple possible, il faut choisir le point et orienter la base où l'on exprimera la matrice d'inertie, en tenant compte des plans, axes ou centres de symétrie matérielle que peut avoir le solide. (Il y a symétrie matérielle s'il y a, à la fois, symétrie géométrique et symétrie de répartition de masse.)

Déterminons pour les deux exemples qui suivent les particularités de la matrice d'inertie du solide (S), au point O, relativement à la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

EXEMPLE 1

Le solide (S) admet le plan (O, \vec{x}, \vec{y}) comme plan de symétrie matérielle.

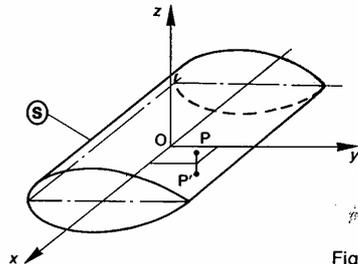


Fig. 4

A tout point $P(x, y, z)$ de masse dm , on peut associer le point $P'(x, y, -z)$ également de masse dm .

Par conséquent, le produit d'inertie $\int_{P \in S} zx \, dm$ est

nul, car l'intégrale $\int_{P \in S} zx \, dm$ pour $z \geq 0$ est opposée

à l'intégrale $\int_{P \in S} zx \, dm$ pour $z \leq 0$. De la même façon

le produit d'inertie $\int_{P \in S} yz \, dm$ est nul. Par suite la matrice d'inertie est de la forme :

$$[I_O(S)] = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

l'axe (O, \vec{z}) est donc principal d'inertie.

EXEMPLE 2

Le solide (S) admet l'axe (O, \vec{z}) comme axe de symétrie matérielle.

Par un raisonnement analogue au précédent on montre que la matrice d'inertie est de la forme :

$$[I_O(S)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(-, -, \vec{z})}$$

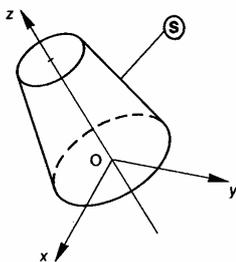


Fig. 5

La notation $(-, -, \vec{z})$ indique que la matrice d'inertie est de cette forme dans toute base orthonormée admettant pour troisième vecteur unitaire \vec{z} . Les deux autres vecteurs unitaires seront déterminés lorsqu'il s'agira de choisir une base commune pour multiplier la matrice d'inertie par la matrice colonne associée à un vecteur.

11. LES DIFFÉRENTS MOMENTS D'INERTIE

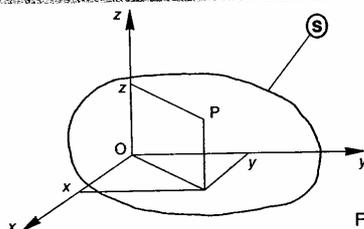


Fig. 6

Pour faciliter les calculs des moments d'inertie du solide (S) par rapport aux axes (O, \vec{x}) , (O, \vec{y}) et (O, \vec{z}) on est amené à définir les moments d'inertie de ce solide par rapport au point O, par rapport aux plans (O, \vec{x}, \vec{y}) , (O, \vec{y}, \vec{z}) et (O, \vec{z}, \vec{x}) , et à établir les relations existant entre ces moments d'inertie.

11.1. DÉFINITIONS

— Le moment d'inertie du solide (S) par rapport au point O est :

$$I_O = \int_{P \in S} (x^2 + y^2 + z^2) dm = \int_{P \in S} [\overline{OP}]^2 dm.$$

— Le moment d'inertie du solide (S) par rapport au plan (O, \vec{x}, \vec{y}) est :

$$I_{Oxy} = \int_{P \in S} z^2 dm$$

et par permutation circulaire :

$$I_{Oyz} = \int_{P \in S} x^2 dm$$

$$I_{Ozx} = \int_{P \in S} y^2 dm.$$

11.2. RELATIONS ENTRE LES DIFFÉRENTS MOMENTS D'INERTIE

On vérifie facilement les relations suivantes

$$I_0 = I_{Oxy} + I_{Oyz} + I_{Ozx}$$

$$I_0 = \frac{1}{2} (A + B + C)$$

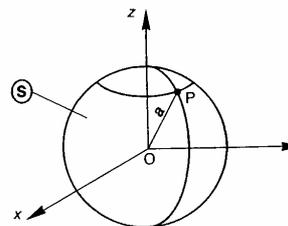
$$A = I_{Oxy} + I_{Ozx}$$

$$B = I_{Oyz} + I_{Oxy}$$

$$C = I_{Ozx} + I_{Oyz}$$

11.3. APPLICATION

Soit une enveloppe sphérique (S) de centre O, de r a, d'épaisseur négligeable, homogène et de mass



QUESTION

Déterminer le moment d'inertie de (S) par rapport de ses diamètres.

RÉPONSE

Vu la symétrie matérielle de (S) par rapport O, les moments d'inertie A, B et C par rapport trois axes (O, \vec{x}) , (O, \vec{y}) et (O, \vec{z}) sont égaux. A s'exprime en fonction du moment d'inertie par rapport au point O par (relation 12) :

$$A = \frac{2}{3} I_0$$

comme $I_0 = \int_{P \in S} [\overline{OP}]^2 dm = ma^2$

$$A = \frac{2}{3} ma^2.$$

2. THÉOREME DE HUYGHENS

Soit O un point quelconque d'un solide (S) de masse m et de centre d'inertie G .

Déterminons les relations entre les moments d'inertie, puis entre les produits d'inertie de (S) , par rapport aux axes des repères $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et $R_1(G, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.

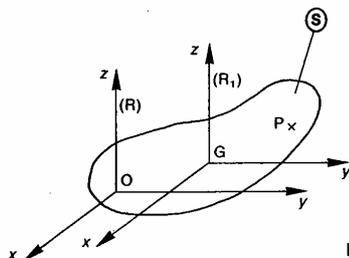


Fig. 8

Posons dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, P étant un point quelconque de (S) :

$$\overline{OP} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \quad \overline{OG} \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \quad \overline{GP} \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix}$$

Sachant que $\overline{OP} = \overline{OG} + \overline{GP}$, nous avons les relations suivantes :

$$\begin{cases} x = a + x_1 \\ y = b + y_1 \\ z = c + z_1 \end{cases} \quad (13)$$

Cherchons tout d'abord la relation entre les moments d'inertie de (S) par rapport aux axes (O, \vec{x}) et (G, \vec{x}_1) , notés respectivement A et A_G . Par définition

$$A = \int_{P \in S} (y^2 + z^2) dm$$

compte tenu des relations (13) :

$$A = \int_{P \in S} [(b + y_1)^2 + (c + z_1)^2] dm$$

soit

$$A = \int_{P \in S} [(y_1^2 + z_1^2) + 2by_1 + 2cz_1 + (b^2 + c^2)] dm$$

ou encore en séparant en quatre intégrales, puis en remarquant que b et c sont indépendants de la sommation :

$$A = \int_{P \in S} (y_1^2 + z_1^2) dm + 2b \int_{P \in S} y_1 dm + 2c \int_{P \in S} z_1 dm + m(b^2 + c^2) \quad (14)$$

Par définition, $\int_{P \in S} (y_1^2 + z_1^2) dm = A_G$ de plus, le centre d'inertie G de (S) est tel que (paragraphe 2.1 du chapitre 1 de statique) :

$$\int_{P \in S} \overline{GP} dm = \vec{0}$$

soit en projection sur \vec{y}_1 et \vec{z}_1 :

$$\int_{P \in S} y_1 dm = 0 \quad \text{et} \quad \int_{P \in S} z_1 dm = 0 \quad (15)$$

Par conséquent la relation (14) s'écrit :

$$A = A_G + m(b^2 + c^2).$$

De la même façon, nous obtenons entre les moments d'inertie par rapport aux autres axes, les relations suivantes (notations évidentes) :

$$B = B_G + m(c^2 + a^2)$$

et

$$C = C_G + m(a^2 + b^2)$$

REMARQUE

La quantité $(b^2 + c^2)$, par exemple, représente le carré de la distance entre les axes (O, \vec{x}) et (G, \vec{x}_1) .

Cherchons ensuite la relation entre le produit d'inertie de (S) par rapport aux axes (O, \vec{y}) et (O, \vec{z}) et le produit d'inertie de (S) par rapport aux axes (G, \vec{y}_1) et (G, \vec{z}_1) , notés respectivement D et D_G . Par définition :

$$D = \int_{P \in S} yz dm$$

compte tenu des relations (13) :

$$D = \int_{P \in S} (b + y_1)(c + z_1) dm$$

soit

$$D = \int_{P \in S} (y_1 z_1 + b z_1 + c y_1 + bc) dm$$

ou encore en séparant en quatre intégrales, puis en remarquant que b et c sont indépendants de la sommation :

$$D = \int_{P \in S} y_1 z_1 dm + b \int_{P \in S} z_1 dm + c \int_{P \in S} y_1 dm + mbc. \quad (16)$$

Par définition :

$$\int_{P \in S} y_1 z_1 dm = D_G.$$

Par conséquent la relation (16) s'écrit, compte tenu des relations (15) :

$$D = D_G + mbc.$$

De la même façon, nous obtenons entre les produits d'inertie par rapport aux autres axes, les relations suivantes (notations évidentes) :

$$E = E_G + mca \quad F = F_G + mab.$$

En résumé :

$A = A_G + m(b^2 + c^2)$	(17)
$B = B_G + m(c^2 + a^2)$	
$C = C_G + m(a^2 + b^2)$	
$D = D_G + mbc$	
$E = E_G + mca$	
$F = F_G + mab.$	

Application

Soit un cylindre de révolution (S), de rayon r , de hauteur h , plein et homogène, de masse m et de centre d'inertie G.

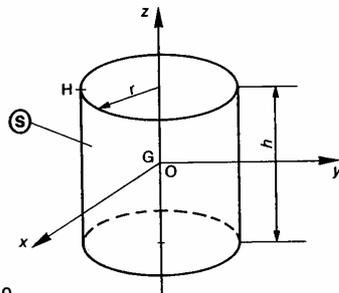


Fig. 9

$R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est un repère tel que son origine O coïncide avec le point G, et l'axe (G, \vec{z}) soit confondu avec l'axe de révolution matérielle de (S). Notons (x, y, z) les coordonnées cartésiennes d'un point P quelconque de (S), dans le repère R.

QUESTION 1

Déterminer le moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe (G, \vec{z}) .

RÉPONSE

Par définition ce moment d'inertie est égal à :

$$C = \int_{P \in S} (x^2 + y^2) dm.$$

Posons $x^2 + y^2 = \rho^2$ et considérons comme éléments d'intégration des cylindres de révolution de hauteur h , de rayon ρ et d'épaisseur $d\rho$.

Alors $dm = \frac{m}{\pi r^2 h} 2\pi h \rho d\rho$

$(\frac{m}{\pi r^2 h}$: masse volumique de (S)), d'où

$$dm = \frac{2m}{r^2} \rho d\rho.$$

Par suite $C = \frac{2m}{r^2} \int_0^r \rho^3 d\rho$

soit

$$C = \frac{mr^2}{2}.$$

QUESTION 2

Déterminer le moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe (G, \vec{x}) , ou (G, \vec{y}) .

RÉPONSE

Par définition ce moment d'inertie est égal à :

$$A = \int_{P \in S} (y^2 + z^2) dm$$

(S) étant de révolution autour de l'axe (G, \vec{z}) :

$$A = B = \int_{P \in S} (z^2 + x^2) dm$$

additionnons membre à membre ces deux relations

$$2A = \int_{P \in S} (x^2 + y^2) dm + 2 \int_{P \in S} z^2 dm$$

ce qui fait apparaître C. D'où

$$A = \frac{C}{2} + \int_{P \in S} z^2 dm.$$

Pour calculer l'intégrale $\int_{P \in S} z^2 dm$ considérons c éléments d'intégration des disques d'axe (G, \vec{z}) , d'épaisseur dz .

Alors :

$$\int_{P \in S} z^2 dm = \int_{-h}^h z^2 \frac{m}{h} dz$$

soit

$$\int_{P \in S} z^2 dm = \frac{mh^2}{12}.$$

Par suite :

$$A = \frac{mr^2}{4} + \frac{mh^2}{12}.$$

Remarquons que $A = C$ si $h = r\sqrt{3}$.

***QUESTION 3**

En déduire la matrice d'inertie de (S) au point G, base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

RÉPONSE

Cette matrice s'écrit :

$$[I_G(S)] = \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{4} + \frac{mh^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{4} + \frac{mh^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{2} \end{bmatrix} (\vec{x}, \vec{y})$$

QUESTION 4

Déterminer les moments d'inertie et les produits de (S) au point H, tel que $\vec{GH} = -r\vec{y} + \frac{h}{2}\vec{z}$, relativ la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

RÉPONSE

En appliquant les relations (17) avec $a = 0$, $b = r$ et (composantes de \vec{HG}), on trouve :

$$\begin{aligned} A_H &= m \left(\frac{5r^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right) \\ B_H &= m \left(\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right) \\ C_H &= \frac{3}{2} mr^2 \\ D_H &= -m \frac{rh}{2} \\ E_H &= F_H = 0. \end{aligned}$$

***QUESTION 5**

En déduire la matrice d'inertie de (S) au point H, dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

RÉPONSE

Cette matrice s'écrit :

$$[I_H(S)] = \begin{bmatrix} m \left(\frac{5r^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right) & 0 & 0 \\ 0 & m \left(\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right) & m \frac{rh}{2} \\ 0 & m \frac{rh}{2} & \frac{3}{2} mr^2 \end{bmatrix} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

13 MOMENT CINÉTIQUE D'UN SOLIDE

Soit un solide (S) de masse m , de centre d'inertie G , en mouvement par rapport à un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Soit A un point lié au solide (S). Par définition le moment cinétique au point A du solide (S) dans son mouvement par rapport au repère R est :

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = \int_{P \in S} \overline{AP} \wedge \vec{v}(P/R) dm$$

si le point A est lié au solide (S), il existe entre les vecteurs vitesse $\vec{v}(P/R)$ et $\vec{v}(A/R)$ la relation suivante :

$$\vec{v}(P/R) = \vec{v}(A/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overline{AP}$$

Pour bien préciser que le point A est lié au solide (S) nous noterons le vecteur vitesse du point A par rapport au repère R : $\vec{v}(A \in S/R)$.

Par suite :

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = \int_{P \in S} \overline{AP} \wedge [\vec{v}(A \in S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overline{AP}] dm$$

soit

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = \int_{P \in S} \overline{AP} \wedge \vec{v}(A \in S/R) dm + \int_{P \in S} \overline{AP} \wedge [\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overline{AP}] dm$$

la première intégrale s'écrit :

$$\left(\int_{P \in S} \overline{AP} dm \right) \wedge \vec{v}(A \in S/R)$$

Sachant que la position du centre d'inertie G de (S)

est définie par $m \overline{AG} = \int_{P \in S} \overline{AP} dm$, cette intégrale est égale à $m \overline{AG} \wedge \vec{v}(A \in S/R)$.

Par conséquent :

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = m \overline{AG} \wedge \vec{v}(A \in S/R) + \int_{P \in S} \overline{AP} \wedge [\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overline{AP}] dm \quad (18)$$

Donnons l'expression définitive du moment cinétique $\vec{\sigma}_A(S/R)$ dans les deux cas suivants :

13.1. PREMIER CAS

Le mouvement de (S) par rapport à R est tel que $\vec{\Omega}(S/R)$ soit de la forme $\theta' \vec{z}$ (c'est le cas lorsque (S) a un mouvement plan sur plan dans le plan (O, \vec{x}, \vec{y}) ou un mouvement hélicoïdal de direction \vec{z}).

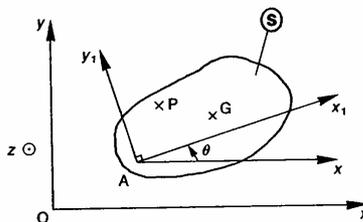


Fig. 10

Soit $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié à (S). Posons $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_1)$, alors $\vec{\Omega}(S/R) = \theta' \vec{z}$ et

$$\overline{AP} = x_1 \vec{x}_1 + y_1 \vec{y}_1 + z \vec{z}$$

Dans ces conditions l'intégrale

$$\int_{P \in S} \overline{AP} \wedge [\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overline{AP}] dm$$

est égale à :

$$\int_{P \in S} (x_1 \vec{x}_1 + y_1 \vec{y}_1 + z \vec{z}) \wedge [\theta' \vec{z} \wedge (x_1 \vec{x}_1 + y_1 \vec{y}_1 + z \vec{z})] dm$$

Soit après avoir effectué les produits vectoriels :

$$\int_{P \in S} \theta' [-zx_1 \vec{x}_1 - y_1 z \vec{y}_1 + (x_1^2 + y_1^2) \vec{z}] dm$$

ou :

$$-\theta' \vec{x}_1 \int_{P \in S} zx_1 dm - \theta' \vec{y}_1 \int_{P \in S} y_1 z dm + \theta' \vec{z} \int_{P \in S} (x_1^2 + y_1^2) dm$$

Ce qui fait apparaître deux produits d'inertie et un moment d'inertie de (S) par rapport aux axes du repère R_1 .

Posons : $E_1 = \int_{P \in S} zx_1 dm$

$D_1 = \int_{P \in S} y_1 z dm$

$C = I_{A_z} = \int_{P \in S} (x_1^2 + y_1^2) dm$

Par suite l'expression du moment cinétique $\vec{\sigma}_A(S/R)$ écrite en (18) devient :

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = m \overline{AG} \wedge \vec{v}(A \in S/R) - E_1 \theta' \vec{x}_1 - D_1 \theta' \vec{y}_1 + I_{A_z} \theta' \vec{z} \quad (19)$$

Cas particuliers

Distinguons les deux cas particuliers suivants :

- A fixe dans R et $E_1=0$, $D_1=0$ (le plan $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ est plan de symétrie matérielle pour (S))

alors : $\vec{\sigma}_A(S/R) = I_{Ax} \theta' \vec{z}$

• A confondu avec G et $E_1=0$, $D_1=0$

alors : $\vec{\sigma}_G(S/R) = I_{Gz} \theta' \vec{z}$ (20)

Application

Considérons un cylindre de révolution (S) roulant sans glisser sur un plan incliné (II), en supposant que l'axe du cylindre reste constamment orthogonal à la ligne de plus grande pente du plan, de façon à schématiser cette étude par un problème plan.

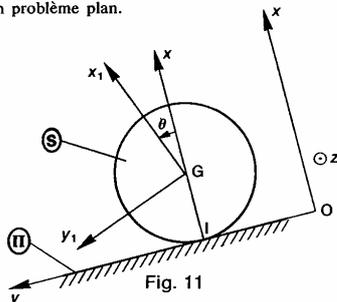


Fig. 11

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié au plan (II), l'axe (O, \vec{y}) étant dirigé suivant la ligne de plus grande pente. Le cylindre de révolution (S), homogène, de masse m , de rayon a et de centre d'inertie G, a pour axe de révolution (G, \vec{z}) . (S) est en contact avec le plan (II) suivant l'axe (I, \vec{z}) et roule sans glisser sur ce plan. $R_1(G, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est un repère lié à (S). On pose : $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_1)$. Soit $I_{Gz} = \frac{ma^2}{2}$ le moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe (G, \vec{z}) . Les produits d'inertie de (S) par rapport aux axes du repère R_1 sont nuls ($E_1=0$, $D_1=0$).

QUESTION 1

Déterminer le moment cinétique au point G de (S) dans son mouvement par rapport à R.

RÉPONSE

Par application de la relation (20), on trouve :

$$\vec{\sigma}_G(S/R) = \frac{ma^2}{2} \theta' \vec{z}$$

QUESTION 2

Déterminer le moment dynamique au point I de (S) dans son mouvement par rapport à R.

RÉPONSE

Deux méthodes sont possibles : on peut passer de G au point I au niveau du moment cinétique ou au du moment dynamique.

Première méthode :

Les moments cinétiques $\vec{\sigma}_I(S/R)$ et $\vec{\sigma}_G(S/R)$ sont liés par la relation (3) :

$$\vec{\sigma}_I(S/R) = \vec{\sigma}_G(S/R) + m \vec{V}(G/R) \wedge \vec{GI}$$

sachant que :

$$\vec{V}(G/R) = \vec{V}(I \in S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{IG}$$

et que (S) roule sans glisser sur le plan (II) :

$$\vec{V}(G/R) = \vec{0} + \theta' \vec{z} \wedge a \vec{x}$$

soit

$$\vec{V}(G/R) = a \theta' \vec{y}$$

$$\vec{\sigma}_I(S/R) = \frac{ma^2}{2} \theta' \vec{z} + ma \theta' \vec{y} \wedge (-a \vec{x})$$

d'où

$$\vec{\sigma}_I(S/R) = \frac{3}{2} ma^2 \theta' \vec{z}$$

Le moment dynamique $\vec{\delta}_I(S/R)$ s'obtient à partir du moment cinétique $\vec{\sigma}_I(S/R)$ par la relation suivante (6) :

$$\vec{\delta}_I(S/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_I(S/R) \right]_R + m \vec{V}(I/R) \wedge \vec{V}(G/R)$$

Comme cela a été signalé au paragraphe 4, la vitesse $\vec{V}(I/R)$ est uniquement égal à $\left[\frac{d}{dt} \vec{OI} \right]_R$. C'est

le point géométrique de contact entre (S) et (II) qu'il faut considérer dans ce calcul, point qui n'appartient ni à (S) ni à (II).

Les points I et G ayant même vecteur vitesse par rapport à R (l'axe (I, \vec{x}) a un mouvement de translation par rapport à R) le produit vectoriel $\vec{V}(I/R) \wedge \vec{V}(G/R)$ est nul. Alors :

$$\vec{\delta}_I(S/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_I(S/R) \right]_R$$

d'où

$$\vec{\delta}_I(S/R) = \frac{3}{2} ma^2 \theta'' \vec{z}$$

Deuxième méthode

Le moment dynamique $\vec{\delta}_G(S/R)$ s'obtient à partir du moment cinétique $\vec{\sigma}_G(S/R)$ par la relation (5) (relation 8) :

$$\vec{\delta}_G(S/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_G(S/R) \right]_R$$

soit

$$\vec{\delta}_G(S/R) = \frac{ma^2}{2} \theta'' \vec{z}$$

les moments dynamiques $\vec{\delta}_I(S/R)$ et $\vec{\delta}_G(S/R)$ sont liés par la relation (relation 4) :

$$\vec{\delta}_I(S/R) = \vec{\delta}_G(S/R) + m \vec{\Gamma}(G/R) \wedge \vec{GI}$$

sachant que

$$\vec{\Gamma}(G/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{V}(G/R) \right]_R = \left[\frac{d}{dt} a \theta' \vec{y} \right]_R$$

soit

$$\vec{\Gamma}(G/R) = a \theta'' \vec{y}$$

$$\vec{\delta}_I(S/R) = \frac{ma^2}{2} \theta'' \vec{z} + ma \theta'' \vec{y} \wedge (-a \vec{x})$$

d'où

$$\vec{\delta}_I(S/R) = \frac{3}{2} ma^2 \theta'' \vec{z}$$

REMARQUE

La décision d'écrire le moment dynamique au point I sera expliquée au chapitre 2.

13.2. DEUXIÈME CAS

Cas général

Le mouvement de (S) par rapport à R est quelconque.

L'intégrale $\int_{P \in S} \overline{AP} \wedge [\overline{\Omega}(S/R) \wedge \overline{AP}] dm$ de la relation (18) représente l'opérateur d'inertie de (S) au point A appliqué au vecteur $\overline{\Omega}(S/R)$. Par conséquent l'expression du moment cinétique $\vec{\sigma}_A(S/R)$ écrite en (18) devient :

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = m \overline{AG} \wedge \overline{V}(A \in S/R) + \overline{J}_A(S, \overline{\Omega}(S/R)). \quad (21)$$

Cas particuliers

Distinguons deux cas particuliers où le produit vectoriel est nul.

- A fixe dans R

alors $\vec{\sigma}_A(S/R) = \overline{J}_A(S, \overline{\Omega}(S/R)). \quad (22)$

- A confondu avec G

alors $\vec{\sigma}_G(S/R) = \overline{J}_G(S, \overline{\Omega}(S/R)). \quad (23)$

Application

Considérons une toupie (S) d'axe de symétrie matérielle (O, \vec{z}_1) dont la pointe O reste immobile sur un plan (II).

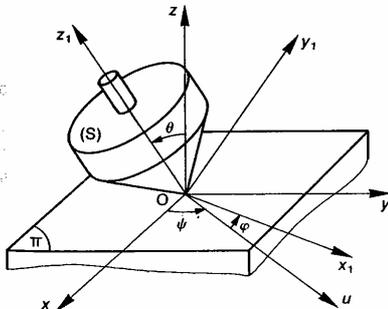


Fig. 12

Soit R(O, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) un repère lié au plan (II), l'axe (O, \vec{z}) étant dirigé suivant la verticale ascendante.

Soit R1(O, $\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1$) un repère lié à (S). La matrice d'inertie de (S) au point O est :

$$[I_{O(S)}] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_1)}$$

La position de la base de R1 par rapport à la base de R est définie par les trois angles d'Euler ψ, θ, φ . (Première base intermédiaire : ($\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}$), deuxième base intermédiaire : ($\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_1$)).

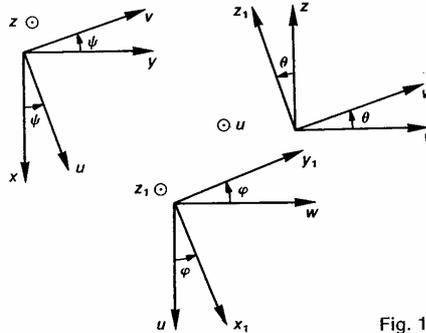


Fig. 13

QUESTION 1

Déterminer le moment cinétique au point O de (S) dans son mouvement par rapport à R.

RÉPONSE

D'après la relation (22) :

$$\vec{\sigma}_O(S/R) = \overline{J}_O(S, \overline{\Omega}(S/R)).$$

Le vecteur $\overline{\Omega}(S/R)$ a pour expression :

$$\overline{\Omega}(S/R) = \psi' \vec{z} + \theta' \vec{u} + \varphi' \vec{z}_1.$$

La multiplication de la matrice d'inertie par la matrice colonne associée au vecteur $\overline{\Omega}(S/R)$ donnera un résultat simple si on exprime ces deux matrices dans la base ($\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_1$), avec

$$\overline{\Omega}(S/R) = \psi' (\cos \theta \vec{z}_1 + \sin \theta \vec{w}) + \theta' \vec{u} + \varphi' \vec{z}_1$$

soit

$$\overline{\Omega}(S/R) = \theta' \vec{u} + \psi' \sin \theta \vec{w} + (\varphi' + \psi' \cos \theta) \vec{z}_1$$

$$[\vec{\sigma}_O(S/R)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta' \\ \psi' \sin \theta \\ \varphi' + \psi' \cos \theta \end{bmatrix}_{(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_1)}$$

Par conséquent :

$$\vec{\sigma}_O(S/R) = A (\theta' \vec{u} + \psi' \sin \theta \vec{w}) + C (\varphi' + \psi' \cos \theta) \vec{z}_1.$$

QUESTION 2

Déterminer le moment dynamique au point O de (S) dans son mouvement par rapport à R :

- a) en projection sur \vec{z} , soit $\vec{z} \cdot \vec{\sigma}_O(S/R)$;
 - b) en projection sur \vec{z}_1 , soit $\vec{z}_1 \cdot \vec{\sigma}_O(S/R)$;
 - c) en projection sur \vec{u} , soit $\vec{u} \cdot \vec{\sigma}_O(S/R)$;
- (ce choix sera expliqué au chapitre 2).

Dynamique

RÉPONSE

Le point O étant fixe dans R, le moment dynamique se déduit du moment cinétique par la relation :

$$\vec{\delta}_0(S/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_0(S/R) \right]_R$$

a) Pour déterminer la projection du moment dynamique sur \vec{z} il ne faut pas dériver au préalable l'expression du moment cinétique (calculs fastidieux) mais procéder comme suit :

$$\vec{z} \cdot \vec{\delta}_0(S/R) = \vec{z} \cdot \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_0(S/R) \right]_R \quad (24)$$

En remarquant que :

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{z} \cdot \vec{\sigma}_0(S/R) \right]_R = \left[\frac{d\vec{z}}{dt} \right]_R \cdot \vec{\sigma}_0(S/R) + \vec{z} \cdot \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_0(S/R) \right]_R$$

le deuxième membre de la relation (24) s'écrit :

$$\vec{z} \cdot \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_0(S/R) \right]_R = \left[\frac{d}{dt} \vec{z} \cdot \vec{\sigma}_0(S/R) \right]_R - \left[\frac{d\vec{z}}{dt} \right]_R \cdot \vec{\sigma}_0(S/R)$$

le vecteur unitaire \vec{z} étant fixe dans R, on a $\left[\frac{d\vec{z}}{dt} \right]_R = \vec{0}$

$$\text{d'où} \quad \vec{z} \cdot \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_0(S/R) \right]_R = \left[\frac{d}{dt} \vec{z} \cdot \vec{\sigma}_0(S/R) \right]_R$$

la relation (24) s'écrit donc :

$$\vec{z} \cdot \vec{\delta}_0(S/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{z} \cdot \vec{\sigma}_0(S/R) \right]_R$$

sachant que :

$$\vec{\sigma}_0(S/R) = A(\theta' \vec{u} + \psi' \sin \theta \vec{w}) + C(\varphi' + \psi' \cos \theta) \vec{z}_1$$

$$\vec{z} \cdot \vec{\sigma}_0(S/R) = A\psi' \sin^2 \theta + C(\varphi' + \psi' \cos \theta) \cos \theta$$

alors

$$\vec{z} \cdot \vec{\delta}_0(S/R) = \frac{d}{dt} [A\psi' \sin^2 \theta + C(\varphi' + \psi' \cos \theta) \cos \theta]$$

Expression qu'il faut bien se garder de dériver prématurément.

$$b) \quad \vec{z}_1 \cdot \vec{\delta}_0(S/R) = \vec{z}_1 \cdot \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_0(S/R) \right]_R$$

Par le même raisonnement que précédemment on a la relation :

$$\vec{z}_1 \cdot \vec{\delta}_0(S/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{z}_1 \cdot \vec{\sigma}_0(S/R) \right]_R - \left[\frac{d\vec{z}_1}{dt} \right]_R \cdot \vec{\sigma}_0(S/R)$$

Calculons $\left[\frac{d\vec{z}_1}{dt} \right]_R$ en utilisant la base intermédiaire ($\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_1$) dans laquelle \vec{z}_1 est constant.

$$\left[\frac{d\vec{z}_1}{dt} \right]_R = \left[\frac{d\vec{z}_1}{dt} \right]_{(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_1)} + \vec{\Omega}((\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_1)/R) \wedge \vec{z}_1$$

$$= \vec{0} + (\psi' \vec{z} + \theta' \vec{u}) \wedge \vec{z}_1$$

$$\text{soit} \quad \left[\frac{d\vec{z}_1}{dt} \right]_R = \psi' \sin \theta \vec{u} - \theta' \vec{w}$$

Par suite, on constate que le produit scalaire de $\left[\frac{d\vec{z}_1}{dt} \right]_R$ avec $\vec{\sigma}_0(S/R)$ est nul, si bien que

$$\vec{z}_1 \cdot \vec{\delta}_0(S/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{z}_1 \cdot \vec{\sigma}_0(S/R) \right]_R$$

soit

$$\vec{z}_1 \cdot \vec{\delta}_0(S/R) = C \frac{d}{dt} (\varphi' + \psi' \cos \theta)$$

$$c) \quad \vec{u} \cdot \vec{\delta}_0(S/R) = \vec{u} \cdot \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_0(S/R) \right]_R$$

toujours par le même raisonnement :

$$\vec{u} \cdot \vec{\delta}_0(S/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{u} \cdot \vec{\sigma}_0(S/R) \right]_R - \left[\frac{d\vec{u}}{dt} \right]_R \cdot \vec{\sigma}_0(S/R)$$

$$\left[\frac{d\vec{u}}{dt} \right]_R = \left[\frac{d\vec{u}}{dt} \right]_{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})} + \vec{\Omega}((\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})/R) \wedge \vec{u} = \vec{0} + (\psi' \vec{z} \wedge \vec{u})$$

$$\text{soit} \quad \left[\frac{d\vec{u}}{dt} \right]_R = \psi' \vec{v}$$

$$\left[\frac{d\vec{u}}{dt} \right]_R \cdot \vec{\sigma}_0(S/R) = A\psi'^2 \sin \theta \cos \theta - C(\varphi' + \psi' \cos \theta) \psi'$$

Par suite :

$$\vec{u} \cdot \vec{\delta}_0(S/R) = A\theta' + \psi' \sin \theta [C(\varphi' + \psi' \cos \theta) - A\psi' \cos \theta]$$

14. ÉNERGIE CINÉTIQUE D'UN SOLIDE

Soit un solide (S) de masse m , de centre d'inertie en mouvement par rapport à un repère R(O, \vec{x} , \vec{y}). Soit A un point lié au solide (S).

Par définition, l'énergie cinétique du solide (S) d son mouvement par rapport au repère R est :

$$T(S/R) = \frac{1}{2} \int_{P \in S} [\vec{V}(P/R)]^2 dm$$

Si le point A est lié au solide (S), il existe en les vecteurs vitesse $\vec{V}(P/R)$ et $\vec{V}(A/R)$ la relation

$$\vec{V}(P/R) = \vec{V}(A/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overline{AP}$$

REMARQUES

— Pour bien préciser que le point A est lié au solide (S) nous noterons le vecteur vitesse point A par rapport au repère R : $\vec{V}(A \in S/R)$
— Par commodité nous calculerons le double l'énergie cinétique.

Mettons le double de l'énergie cinétique sous forme :

$$2T(S/R) = \int_{P \in S} \vec{V}(P/R) \cdot \vec{V}(P/R) dm$$

et remplaçons le premier vecteur $\vec{V}(P/R)$ par expression en fonction de $\vec{V}(A \in S/R)$:

$$2T(S/R) = \int_{P \in S} [\vec{V}(A \in S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overline{AP}] \cdot \vec{V}(P/R)$$

soit

$$2T(S/R) = \int_{P \in S} \vec{V}(A \in S/R) \cdot \vec{V}(P/R) dm + \int_{P \in S} [\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overline{AP}] \cdot \vec{V}(P/R)$$

la première intégrale s'écrit

$$\vec{V}(A \in S/R) \cdot \int_{P \in S} \vec{V}(P/R) dm$$

la deuxième intégrale s'écrit en inversant au préalable les signes scalaire et vectoriel du produit mixte situé sous le signe somme :

$$\vec{\Omega}(S/R) \cdot \int_{P \in S} \overline{AP} \wedge \vec{V}(P/R) dm$$

par suite :

$$2T(S/R) = \vec{V}(A \in S/R) \cdot \int_{P \in S} \vec{V}(P/R) dm + \vec{\Omega}(S/R) \cdot \int_{P \in S} \overline{AP} \wedge \vec{V}(P/R) dm.$$

Dans cette expression apparaissent les deux éléments de réduction au point A du *torseur cinétique* de (S) dans son mouvement par rapport à R, ainsi que les deux éléments de réduction au point A du *torseur cinématique* du mouvement de (S) par rapport à R.

Rappel

Soient deux torseurs

$$\{\mathcal{C}_1\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(\mathcal{C}_1) \\ \vec{M}_A(\mathcal{C}_1) \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{C}_2\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(\mathcal{C}_2) \\ \vec{M}_A(\mathcal{C}_2) \end{array} \right\}.$$

exprimés au même point A.

On appelle *produit des deux torseurs* $\{\mathcal{C}_1\}$ et $\{\mathcal{C}_2\}$ le scalaire suivant :

$$\{\mathcal{C}_1\} \cdot \{\mathcal{C}_2\} = \vec{R}(\mathcal{C}_1) \cdot \vec{M}_A(\mathcal{C}_2) + \vec{R}(\mathcal{C}_2) \cdot \vec{M}_A(\mathcal{C}_1).$$

Le produit des deux torseurs est indépendant du point choisi pour exprimer les torseurs.

Par conséquent, le double de l'énergie cinétique du solide (S) dans son mouvement par rapport au repère R est égal au produit de son torseur cinétique par son torseur cinématique

$$2T(S/R) = \{C(S/R)\} \cdot \{\psi(S/R)\}$$

ce qui correspond à :

$$2T(S/R) = m \vec{V}(G/R) \cdot \vec{V}(A \in S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \cdot \vec{\sigma}_A(S/R).$$

Cas particuliers

Distinguons les deux cas particuliers suivants :

Premier cas : A fixe dans R. Alors

$$2T(S/R) = \vec{\Omega}(S/R) \cdot \vec{\sigma}_A(S/R)$$

considérons les deux sous-cas suivants :

a) $\vec{\Omega}(S/R)$ de la forme $\theta' \vec{z}$ (voir paragraphe 13) d'après la relation 19 :

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = -E_1 \theta' \vec{x}_1 - D_1 \theta' \vec{y}_1 + I_{Az} \theta' \vec{z}$$

par suite :

$$2T(S/R) = I_{Az} \theta'^2.$$

* b) $\vec{\Omega}(S/R)$ quelconque alors

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = \vec{J}_A(S, \vec{\Omega}(S/R)) \quad (\text{relation 22})$$

et $2T(S/R) = \vec{\Omega}(S/R) \cdot \vec{J}_A(S, \vec{\Omega}(S/R)).$

Deuxième cas : A confondu avec G : Alors

$$2T(S/R) = m [\vec{V}(G/R)]^2 + \vec{\Omega}(S/R) \cdot \vec{\sigma}_G(S/R)$$

Considérons les deux sous-cas précédents.

a) $\vec{\Omega}(S/R)$ de la forme $\theta' \vec{z}$ (voir paragraphe 13) d'après la relation 19 :

$$\vec{\sigma}_G(S/R) = -E_1 \theta' \vec{x}_1 - D_1 \theta' \vec{y}_1 + I_{Gz} \theta' \vec{z}$$

par suite :

$$2T(S/R) = m [\vec{V}(G/R)]^2 + I_{Gz} \theta'^2.$$

* b) $\vec{\Omega}(S/R)$ quelconque alors

$$\vec{\sigma}_G(S/R) = \vec{J}_G(S, \vec{\Omega}(S/R)) \quad (\text{relation 23})$$

et

$$2T(S/R) = m [\vec{V}(G/R)]^2 + \vec{\Omega}(S/R) \cdot \vec{J}_G(S, \vec{\Omega}(S/R)).$$

Application 1

Complétons la première application du paragraphe 13 (cylindre de révolution sur un plan incliné) par la question suivante.

QUESTION 3

Déterminer l'énergie cinétique de (S) dans son mouvement par rapport à R.

RÉPONSE

(S) roulant sans glisser sur (II) : $\vec{V}(I \in S/R) = \vec{0}$, par suite :

$$2T(S/R) = \vec{\Omega}(S/R) \cdot \vec{\sigma}_I(S/R)$$

soit avec

$$\vec{\Omega}(S/R) = \theta' \vec{z} \quad \text{et} \quad \vec{\sigma}_I(S/R) = \frac{3}{2} m a^2 \theta' \vec{z}$$

$$2T(S/R) = \frac{3}{2} m a^2 \theta'^2.$$

* Application 2

Complétons la deuxième application du paragraphe 13 (toupie) par la question suivante :

QUESTION 3

Déterminer l'énergie cinétique de (S) dans son mouvement par rapport à R.

RÉPONSE

Le point O étant fixe dans R :

$$2T(S/R) = \vec{\Omega}(S/R) \cdot \vec{\sigma}_O(S/R)$$

avec $\vec{\Omega}(S/R) = \psi' \vec{z} + \theta' \vec{u} + \varphi' \vec{z}_1$

ou $\vec{\Omega}(S/R) = \theta' \vec{u} + \psi' \sin \theta \vec{w} + (\varphi' + \psi' \cos \theta) \vec{z}_1$
 et $\vec{\sigma}_O(S/R) = A(\theta' \vec{u} + \psi' \sin \theta \vec{w}) + C(\varphi' + \psi' \cos \theta) \vec{z}_1$
 Le double de l'énergie cinétique de (S) dans mouvement par rapport à R est :

$$2T(S/R) = A(\theta'^2 + \psi'^2 \sin^2 \theta) + C(\varphi' + \psi' \cos \theta)^2$$

A SAVOIR

1. Les éléments de réduction du *torseur cinétique* d'un ensemble matériel (E) de masse m, de centre d'inertie G, dans son mouvement par rapport à un repère R :

$$\{C(E/R)\} = \left\{ \begin{array}{l} \int_{P \in E} \vec{V}(P/R) dm = m \vec{V}(G/R) \\ \int_{P \in E} \vec{AP} \wedge \vec{V}(P/R) dm = \vec{\sigma}_A(E/R) \end{array} \right\}$$

2. Les éléments de réduction du *torseur dynamique* de cet ensemble matériel (E) :

$$\{D(E/R)\} = \left\{ \begin{array}{l} \int_{P \in E} \vec{\Gamma}(P/R) dm = m \vec{\Gamma}(G/R) \\ \int_{P \in E} \vec{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R) dm = \vec{\delta}_A(E/R) \end{array} \right\}$$

3. La relation entre le *moment dynamique* et le *moment cinétique* de l'ensemble matériel (E) :

$$\vec{\delta}_A(E/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_A(E/R) \right]_R + m \vec{V}(A/R) \wedge \vec{V}(G/R)$$

si A est fixe dans R :

$$\vec{\delta}_A(E/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_A(E/R) \right]_R$$

Si A est confondu avec G :

$$\vec{\delta}_G(E/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_G(E/R) \right]_R$$

4. L'*énergie cinétique* de l'ensemble matériel (E) dans son mouvement par rapport au repère R :

$$T(E/R) = \frac{1}{2} \int_{P \in E} [\vec{V}(P/R)]^2 dm$$

* 5. L'*opérateur d'inertie* d'un solide (S), au point O, est l'opérateur qui, à tout vecteur \vec{u} fait correspondre le vecteur :

$$\vec{J}_O(S, \vec{u}) = \int_{P \in S} \vec{OP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OP}) dm$$

* 6. La *matrice d'inertie* du solide (S) au point O, relativement à la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$[I_O(S)] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(x, y, z)}$$

avec

$$\begin{aligned} A &= \int_{P \in S} (y^2 + z^2) dm & B &= \int_{P \in S} (z^2 + x^2) dm \\ C &= \int_{P \in S} (x^2 + y^2) dm & D &= \int_{P \in S} yz dm \\ E &= \int_{P \in S} zx dm & F &= \int_{P \in S} xy dm \end{aligned}$$

* 7. Le *moment d'inertie* du solide (S) par rapport à l'axe $\Delta(O, \vec{i})$:

$$I(S/\Delta) = \vec{i} \cdot \vec{J}_O(S, \vec{i})$$

8. *Théorème de Huyghens* (S) : solide de masse m, de centre d'inertie. Relations entre les moments d'inertie au point et au point G :

$$\begin{aligned} A &= A_G + m(b^2 + c^2) \\ B &= B_G + m(c^2 + a^2) \\ C &= C_G + m(a^2 + b^2) \end{aligned}$$

Relations entre les produits d'inertie au point et au point G :

$$\begin{aligned} D &= D_G + mbc \\ E &= E_G + mca \\ F &= F_G + mab \end{aligned}$$

Sachant que $\vec{OG} = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z}$ dans la b. $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ considérée.

9. Le *moment cinétique* du solide (S), au point dans son mouvement par rapport au repère

Premier cas : $\vec{\Omega}(S/R)$ de la forme $\theta' \vec{z}$

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = m \vec{AG} \wedge \vec{V}(A \in S/R) - E_1 \theta' \vec{x}_1 - D_1 \theta' \vec{y}_1 + I_{A_1}$$

si A est fixe dans R et $E_1 = 0, D_1 = 0$:

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = I_{A_z} \theta' \vec{z}$$

si A est confondu avec G et $E_1 = 0, D_1 = 0$:

$$\vec{\sigma}_G(S/R) = I_{G_z} \theta' \vec{z}$$

* *Deuxième cas* : $\vec{\Omega}(S/R)$ quelconque

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = m \vec{AG} \wedge \vec{V}(A \in S/R) + \vec{J}_A(S, \vec{\Omega}(S/R))$$

10. Le double de l'*énergie cinétique* du solide est égal au produit de son *torseur cinétique* son *torseur cinématique*. Soit :

$$2T(S/R) = \{C(S/R)\} \cdot \{\psi(S/R)\}$$

Premier cas particulier : $\vec{\Omega}(S/R)$ de la forme si A est fixe dans R :

$$2T(S/R) = I_{A_z} \theta'^2$$

si A est confondu avec G :

$$2T(S/R) = m [\vec{V}(G/R)]^2 + I_{G_z} \theta'^2$$

* *Deuxième cas particulier* : $\vec{\Omega}(S/R)$ quelconque si A est fixe dans R :

$$2T(S/R) = \vec{\Omega}(S/R) \cdot \vec{J}_A(S, \vec{\Omega}(S/R))$$

si A est confondu avec G :

$$2T(S/R) = m [\vec{V}(G/R)]^2 + \vec{\Omega}(S/R) \cdot \vec{J}_G(S, \vec{\Omega}(S/R))$$

PROBLÈME RÉSOLU

Le régulateur de la vitesse de rotation d'une machine thermique est représenté figure 14. Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié au corps (S_0) du régulateur.

La pièce (S_1) supportant les masselottes (S_2) et (S_2') (symétrique de (S_2)) a une liaison pivot d'axe (O, \vec{x}) avec (S_0) . Soit $R_1(O, \vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié à (S_1) . Posons : $\alpha = (\vec{y}, \vec{y}_1)$.

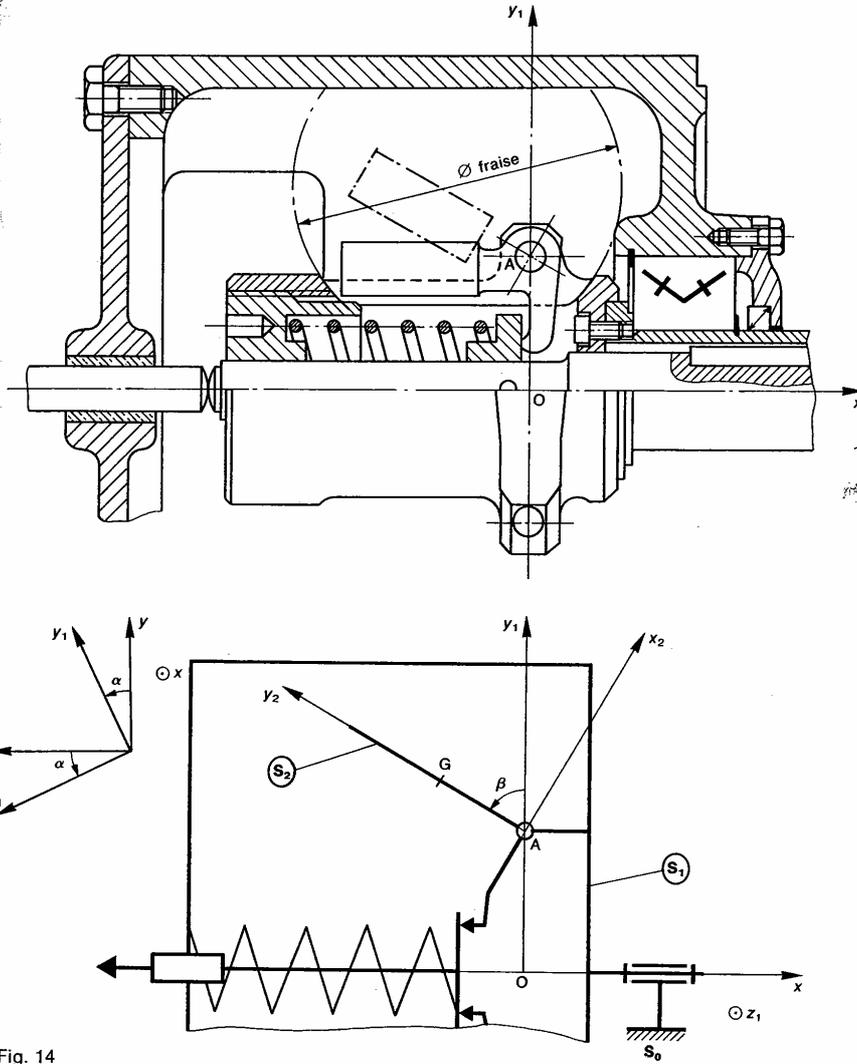


Fig. 14

La masselotte (S₂) de masse m, de centre d'inertie G, a une liaison pivot d'axe (A, z̄₁) avec (S₁), telle que : OA = ay₁ (a > 0).

Soit R₂(A, x̄₂, ȳ₂, z̄₁) un repère lié à (S₂), tel que AG = by₂ (b > 0).

Posons : β = (ȳ₁, ȳ₂). On admet que β est constant pendant la phase de mouvement étudié.

Première partie

Calcul approché : on suppose la masse de (S₂) concentrée en son centre d'inertie.

QUESTION

Déterminer la projection sur z̄₁ du moment dynamique, au point A, de (S₂) dans son mouvement par rapport à R : z̄₁ · δ̄_A(S₂/R).

RÉPONSE

Le torseur dynamique du mouvement de (S₂) par rapport à R s'écrit au point G (voir paragraphe 3.3) :

$$\{D(S_2/R)\} = \begin{Bmatrix} m\bar{\Gamma}(G/R) \\ \bar{0} \end{Bmatrix}_G$$

par conséquent (relation 4) :

$$\bar{\delta}_A(S_2/R) = m\bar{\Gamma}(G/R) \wedge \overline{GA}$$

ou :

$$\bar{\delta}_A(S_2/R) = m\overline{AG} \wedge \bar{\Gamma}(G/R) \quad (25)$$

pour obtenir Γ(G/R) calculons au préalable V(G/R) en utilisant la relation entre les vecteurs vitesse des deux points A et G du solide (S₂) :

$$\bar{V}(G/R) = \bar{V}(A/R) + \bar{\Omega}(S_2/R) \wedge \overline{AG} \quad (26)$$

par définition V(A/R) = [d/dt OA]_R, soit

$$\bar{V}(A/R) = \left[\frac{d}{dt} ay_1 \right]_R$$

en utilisant la base de R₁ :

$$\bar{V}(A/R) = \left[\frac{d}{dt} ay_1 \right]_{R_1} + \bar{\Omega}(R_1/R) \wedge ay_1$$

ay₁ est un vecteur constant dans la base de R₁ et Ω(R₁/R) = α'x̄. Par conséquent :

$$\bar{V}(A/R) = \alpha'x̄ \wedge ay_1$$

soit

$$\bar{V}(A/R) = \alpha\alpha'z_1$$

Par suite la relation (26) s'écrit, sachant que Ω(S₂/R) = α'x̄ et AG = by₂

$$\bar{V}(G/R) = \alpha\alpha'z_1 + \alpha'x̄ \wedge by_2$$

comme x̄ ∧ y₂ = cos βz̄₁

$$\bar{V}(G/R) = (a + b \cos \beta) \alpha'z_1$$

Calculons ensuite Γ(G/R). Par définition

$$\bar{\Gamma}(G/R) = \left[\frac{d}{dt} \bar{V}(G/R) \right]_R, \text{ soit}$$

$$\bar{\Gamma}(G/R) = \left[\frac{d}{dt} (a + b \cos \beta) \alpha'z_1 \right]_R$$

(a + b cos β) étant constant :

$$\bar{\Gamma}(G/R) = (a + b \cos \beta) \left[\frac{d}{dt} \alpha'z_1 \right]_R$$

en utilisant la base de R₁, on peut écrire que

$$\left[\frac{d}{dt} \alpha'z_1 \right]_R = \left[\frac{d}{dt} \alpha'z_1 \right]_{R_1} + \bar{\Omega}(R_1/R) \wedge \alpha'z_1$$

soit

$$\left[\frac{d}{dt} \alpha'z_1 \right]_R = \alpha''z_1 + \alpha'x̄ \wedge \alpha'z_1$$

ou

$$\left[\frac{d}{dt} \alpha'z_1 \right]_R = \alpha''z_1 - \alpha'^2 y_1$$

par suite :

$$\bar{\Gamma}(G/R) = (a + b \cos \beta) (\alpha''z_1 - \alpha'^2 y_1)$$

le moment dynamique δ̄_A(S₂/R) défini en (2) s'écrit donc :

$$\bar{\delta}_A(S_2/R) = mb y_2 \wedge (a + b \cos \beta) (\alpha''z_1 - \alpha'^2 y_1)$$

soit avec y₂ ∧ z₁ = x̄

et y₂ ∧ y₁ = -sin βz̄₁

$$\bar{\delta}_A(S_2/R) = mb (a + b \cos \beta) (\alpha''x̄ + \alpha'^2 \sin \beta z̄_1)$$

par suite, la projection sur z̄₁ de ce moment dynamique est égale à :

$$z_1 \cdot \bar{\delta}_A(S_2/R) = mb (a + b \cos \beta) \alpha'^2 \sin \beta.$$

* Deuxième partie (indépendante de la première partie).

La matrice d'inertie de (S₂) au point A dans base de R₂ est la suivante :

$$[I_A(S_2)] = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(x_2, y_2, z_1)}$$

((S₂) a pour plan de symétrie matérielle le pl (A, x̄₂, ȳ₂)).

QUESTION 1

Déterminer le moment cinétique au point A de (S₂) dans son mouvement par rapport à R : σ̄_A(S₂/R).

RÉPONSE

L'expression de σ̄_A(S₂/R) est donnée par relation (21) du paragraphe 13.2.

$$\bar{\sigma}_A(S_2/R) = m\overline{AG} \wedge \bar{V}(A \in S_2/R) + \bar{J}_A(S_2, \bar{\Omega}(S_2/R))$$

sachant que AG = by₂ et V(A ∈ S₂/R) = αα'z₁ premier terme s'écrit :

$$m\overline{AG} \wedge \bar{V}(A \in S_2/R) = mb y_2 \wedge \alpha\alpha'z_1$$

soit

$$m\overline{AG} \wedge \bar{V}(A \in S_2/R) = maba\alpha'x_2$$

le deuxième terme de la relation (27) s'obtient par le produit de la matrice d'inertie de (S₂) :

la matrice colonne associée au vecteur $\vec{\Omega}(S_2/R)$.

Comme

$$\vec{\Omega}(S_2/R) = \alpha' \vec{x}$$

soit dans la base de R_2 :

$$\vec{\Omega}(S_2/R) = \alpha' \cos \beta \vec{x}_2 - \alpha' \sin \beta \vec{y}_2$$

la matrice colonne associée au vecteur $\vec{J}_A(S_2, \vec{\Omega}(S_2/R))$ est égale à :

$$\vec{J}_A(S_2, \vec{\Omega}(S_2/R)) = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha' \cos \beta \\ -\alpha' \sin \beta \\ 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1)}$$

d'où

$$\vec{J}_A(S_2, \vec{\Omega}(S_2/R)) = (A \cos \beta + F \sin \beta) \alpha' \vec{x}_2 - (F \cos \beta + B \sin \beta) \alpha' \vec{y}_2$$

avec le résultat obtenu en (28) le moment cinétique $\vec{\sigma}_A(S_2/R)$ défini en (27) s'écrit :

$$\vec{\sigma}_A(S_2/R) = (mab + A \cos \beta + F \sin \beta) \alpha' \vec{x}_2 - (F \cos \beta + B \sin \beta) \alpha' \vec{y}_2.$$

QUESTION 2

Déterminer la projection sur \vec{z}_1 du moment dynamique au point A, de (S_2) dans son mouvement par rapport à R : $\vec{z}_1 \cdot \vec{\delta}_A(S_2/R)$.

RÉPONSE

L'expression de $\vec{\delta}_A(S_2/R)$ en fonction de $\vec{\sigma}_A(S_2/R)$ est donnée par la relation (6) du paragraphe 4.

$$\vec{\delta}_A(S_2/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_A(S_2/R) \right]_R + m \vec{V}(A/R) \wedge \vec{V}(G/R)$$

soit en projection sur \vec{z}_1 :

$$\vec{z}_1 \cdot \vec{\delta}_A(S_2/R) = \vec{z}_1 \cdot \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_A(S_2/R) \right]_R + m (\vec{z}_1, \vec{V}(A/R), \vec{V}(G/R))$$

remarquons tout de suite que le deuxième terme est nul, car le produit mixte

$$(\vec{z}_1, \vec{V}(A/R), \vec{V}(G/R))$$

a deux vecteurs de même direction : \vec{z}_1 et $\vec{V}(A/R) = \alpha \alpha' \vec{z}_1$.

Pour calculer le premier terme écrivons que :

$$\vec{z}_1 \cdot \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_A(S_2/R) \right]_R = \left[\frac{d}{dt} \vec{z}_1 \cdot \vec{\sigma}_A(S_2/R) \right]_R - \left[\frac{d\vec{z}_1}{dt} \right]_R \cdot \vec{\sigma}_A(S_2/R)$$

$$\vec{z}_1 \cdot \vec{\sigma}_A(S_2/R) = 0 \text{ et que } \left[\frac{d\vec{z}_1}{dt} \right]_R = -\alpha' \vec{y}_1$$

$$\vec{z}_1 \cdot \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_A(S_2/R) \right]_R = (mab + A \cos \beta + F \sin \beta) \alpha'^2 \sin \beta - (F \cos \beta + B \sin \beta) \alpha'^2 \cos \beta$$

soit

$$\vec{z}_1 \cdot \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_A(S_2/R) \right]_R = [mab \sin \beta + (A - B) \sin \beta \cos \beta + F(\sin^2 \beta - \cos^2 \beta)] \alpha'^2.$$

Par conséquent le moment dynamique $\vec{\delta}_A(S_2/R)$ s'écrit en projection sur \vec{z}_1 .

$$\vec{z}_1 \cdot \vec{\delta}_A(S_2/R) = [mab \sin \beta + (A - B) \sin \beta \cos \beta + F(\sin^2 \beta - \cos^2 \beta)] \alpha'^2.$$

REMARQUE

Le calcul de $\vec{z}_1 \cdot \vec{\delta}_A(S_2/R)$ est celui qu'il faut faire pour déterminer l'action mécanique de la masselotte (S_2) sur la tige du régulateur.

CONSEILS POUR LA RÉSOLUTION

Le calcul du moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe se ramène très souvent au calcul d'une intégrale simple en soulignant en évidence les relations entre les différents moments d'inertie au point considéré. Les moments d'inertie par rapport au point ou à un axe ou à un plan.

Les expressions du moment cinétique et de l'action mécanique en fonction des moments et des produits d'inertie sont applicables uniquement à un seul solide. Par contre, la relation (6) entre le moment dynamique et le moment cinétique est valable pour un ensemble matériel quelconque.

3. Choisir soigneusement le point et la base où l'on exprimera la matrice d'inertie d'un solide pour qu'elle soit la plus simple possible.

4. Pour calculer par exemple $\left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_A(S_2/R) \right]_R$ il est pratiquement toujours plus simple de calculer

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_A(S_2/R) \right]_R = \left[\frac{d}{dt} \right]_R \vec{\sigma}_A(S_2/R)$$

5. Avant de multiplier deux matrices, vérifier qu'elles sont bien exprimées dans la même base.

EXERCICES AVEC RÉPONSES

1 — Déterminer les moments d'inertie par rapport aux axes du repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié aux solides (S) suivants, homogènes et de masse m :

a) (S) est un disque de centre O, de rayon a , d'axe (O, \vec{z}) , supposé d'épaisseur négligeable.

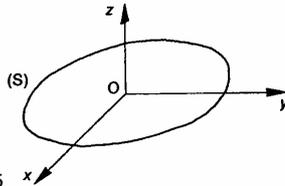


Fig. 15

b) (S) est un demi-disque de centre O, de rayon a , d'axe (O, \vec{z}) , d'axe de symétrie (O, \vec{x}) , supposé d'épaisseur négligeable.

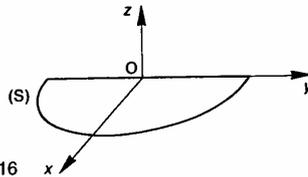


Fig. 16

c) (S) est une sphère pleine de centre O, de rayon a .

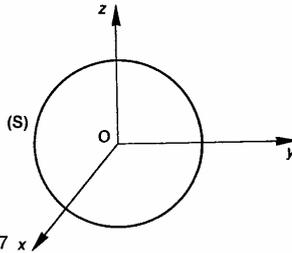


Fig. 17

d) (S) est une demi-sphère pleine de centre O, de rayon a , d'axe de symétrie (O, \vec{z}) .

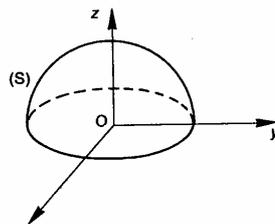


Fig. 18

RÉPONSES

a) $I_{Oz} = \frac{ma^2}{2}$ et $I_{Ox} = I_{Oy} = \frac{1}{2} I_{Oz} = \frac{ma^2}{4}$.

b) Les moments d'inertie sont la moitié de c calculés précédemment, mais la masse surfacique demi-disque est le double de celle du disque de question a). Par conséquent les résultats sont mêmes.

c) $I_{Ox} = I_{Oy} = I_{Oz} = \frac{2}{5} ma^2$.

d) Mêmes résultats qu'à la question précédente.

2 — Une pale d'hélicoptère est schématisée par plaque rectangulaire (S) de largeur a , de longueur b , d'épaisseur négligeable.

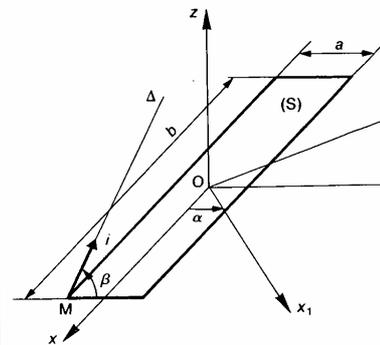


Fig. 19

(S) est homogène, de masse m et de centre d'inertie G . Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à (S) tel que (O, \vec{x}) soit parallèle au plus grand côté du rect et l'axe (O, \vec{z}) perpendiculaire au plan du rect.

QUESTIONS

1° Déterminer les moments d'inertie de (S) par rapport aux axes du repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

2° Déterminer les moments et les produits d'inertie de (S) par rapport aux axes du repère $(M, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, t

$$\vec{OM} = \frac{b}{2} \vec{x} - \frac{a}{2} \vec{y}.$$

* 3° Déterminer la matrice d'inertie de (S) au point G dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

* 4° Déterminer la matrice d'inertie de (S) au point G dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ telle que $(\vec{x}, \vec{x}_1) = \alpha$.

* 5° Déterminer la matrice d'inertie de (S) au point M $\left(\frac{b}{2}, -\frac{a}{2}, 0\right)$, dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

6° Déterminer le moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe de rotation de la pale $\Delta(M, \vec{i})$, tel que $\vec{i} = \cos \beta \vec{y} + \sin \beta \vec{z}$.

RÉPONSES

1° $I_{Ox} = \frac{ma^2}{12}, I_{Oy} = \frac{mb^2}{12}, I_{Oz} = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$.

2° $A = \frac{ma^2}{3}, B = \frac{mb^2}{3}, C = \frac{m}{3}(a^2 + b^2)$,

$D = 0, E = 0, F = -\frac{mab}{4}$.

3°
$$[I_O(S)] = \begin{bmatrix} \frac{ma^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mb^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(a^2 + b^2) \end{bmatrix} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

4° La matrice d'inertie est de la forme :

$$[I_O(S)] = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$$

avec $A = \frac{m}{12}(a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha)$

$B = \frac{m}{12}(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)$

$C = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$

$F = \frac{m}{12}(a^2 - b^2) \sin \alpha \cos \alpha$.

5°
$$[I_M(S)] = \begin{bmatrix} \frac{ma^2}{3} & \frac{mab}{4} & 0 \\ \frac{mab}{4} & \frac{mb^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{3}(a^2 + b^2) \end{bmatrix} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

6° $I(S/\Delta) = \frac{m}{3}(b^2 + a^2 \sin^2 \beta)$.

3 — La figure 20 représente un bras manipulateur destiné à déplacer, sur une chaîne de moulage, des carters en alliage léger de boîte de vitesses.

Il est constitué du bras principal (3) de longueur $l = 1700$ mm, en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}) avec la tourelle d'orientation (2), elle-même en liaison pivot d'axe (O, \vec{y}_2) avec le socle (1). Soit $R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$ le repère lié à la tourelle (2) et $R_3(O, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z})$ le repère lié au bras (3). Un dispositif de préhension (5) est articulé à l'autre extrémité du bras par une liaison pivot d'axe (M, \vec{z}) . Ce dispositif comporte un tube dont une extrémité est boulonnée sur l'arbre de la liaison pivot. Une pince à commande hydraulique est fixée à l'autre extrémité du tube. Soit $R_5(M, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z})$, le repère lié au dispositif de préhension (5). Nous assimilerons l'ensemble {tube-pince-carter} à une masse ponctuelle $m = 45$ kg située au point G, tel que

$\vec{MG} = x\vec{x}_5 + y\vec{y}_5 + z\vec{z}$.

Le but de l'étude est de déterminer la projection sur l'axe (M, \vec{z}) du moment dynamique du dispositif de

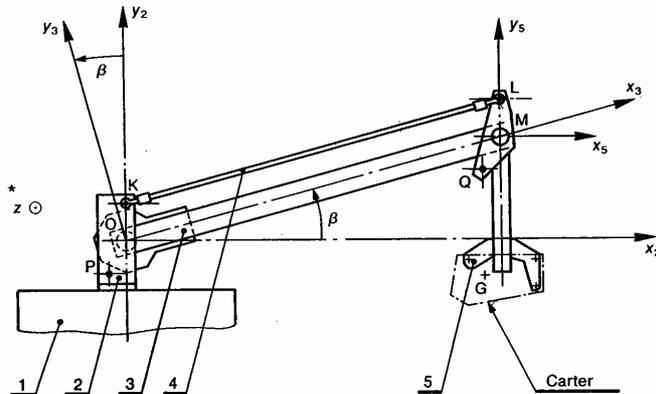


Fig. 20

préhension afin de calculer, par la suite, les actions mécaniques exercées en L par la biellette (4), de même longueur que le bras, et qui assure la verticalité du dispositif quelque soit la position angulaire du bras.

QUESTIONS

1° Déterminer le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(G/2)$ du centre d'inertie G par rapport au socle (2), lorsque l'accélération angulaire du bras (3) est $\beta'' = 2 \text{ rad/s}^2$ et sa vitesse de rotation $\beta' = 2,5 \text{ rad/s}$.

2° Déterminer la projection sur \vec{z} du moment dynamique au point M, du dispositif de préhension dans son mouvement par rapport au socle (2), lorsque la position du bras est telle que $\beta = 30^\circ$. On donne :

$$x = -60 \text{ mm}, y = -620 \text{ mm}, z = 30 \text{ mm}.$$

RÉPONSES

- 1° $\vec{\Gamma}(G/2) = 1\beta''\vec{y}_3 - 1\beta'^2\vec{x}_3$
 $\vec{\Gamma}(G/2) = 3,4\vec{y}_3 - 10,625\vec{x}_3$ (en m/s^2).
- 2° $\vec{z} \cdot \vec{\delta}_M(S/2) = m [x(1\beta'' \cos \beta - 1\beta'^2 \sin \beta)$
 $+ y(1\beta'' \sin \beta + 1\beta'^2 \cos \beta)]$
 $\vec{z} \cdot \vec{\delta}_M(S/2) = -6,617 \text{ N}\cdot\text{m}.$

*4 — Calculs de cinétique préliminaires à l'étude d'une roue présentant un balourd.

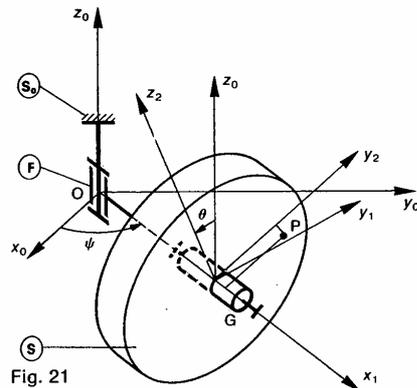


Fig. 21

Le repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié au châssis (S_0). L'axe (O, \vec{z}_0) est dirigé suivant la verticale ascendante. La fusée (F) a une liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_0) avec (S_0). Soit $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié à (F), l'axe (O, \vec{x}_1) étant dirigé suivant l'axe de la fusée. On pose : $\psi = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$.

Notons I le moment d'inertie de (F) par rapport à l'(O, \vec{z}_0).

La roue (S) a une liaison pivot d'axe (O, \vec{x}_1) avec fusée (F).

(S) est assimilée à un solide de révolution d'(O, \vec{x}_1), de masse M et de centre d'inertie G. Soit $R_2(G, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ un repère lié à (S). On pose $\vec{OG} = r\vec{e}_2$ et $\theta = (\vec{z}_0, \vec{z}_2)$.

On désigne par A, B, B les moments princip. d'inertie de (S) au point G.

Le point P schématisant le balourd, est un pt matériel de masse m lié à (S). La position de P d (S) est définie par $\vec{OP} = d\vec{x}_1 + r\vec{y}_2$.

QUESTIONS

1° Déterminer en projection sur \vec{z}_0 le moment cinétique au point O de la fusée (F) dans son mouvement rapport à $R_0 : \vec{z}_0 \cdot \vec{\sigma}_O(F/R_0)$.

2° Déterminer le moment cinétique au point O de roue (S) dans son mouvement par rapport à l' $\vec{\sigma}_O(S/R_0)$.

3° Déterminer le moment cinétique au point O balourd P dans son mouvement par rapport à l' $\vec{\sigma}_O(P/R_0)$.

4° Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble const par (F), (S) et P dans leur mouvement par rapport $R_0 : T(F, S, P/R_0)$.

RÉPONSES

- 1° $\vec{z}_0 \cdot \vec{\sigma}_O(F/R_0) = I\psi'$.
- 2° $\vec{\sigma}_O(S/R_0) = A\theta'\vec{x}_1 + (B + MI^2)\psi'\vec{z}_0$.
- 3° $\vec{\sigma}_O(P/R_0) = m [d^2\psi'\vec{z}_0 - rd\theta'\vec{y}_2$
 $+ r(r\theta' - d\psi' \sin \theta) \vec{x}_1 + r^2\psi' \cos \theta \dots]$
- 4° $2T(F, S, P/R_0)$
 $= [I + B + MI^2 + m(d^2 + r^2 \cos^2 \theta)]\psi'^2 + (A + mr^2) \dots$
 $- 2mrd\psi'\theta' \sin \theta$

*5 — Calcul du moment cinétique et de l'énergie cinétique d'un rouleau conique (S), d'un roulement dont les deux bagues (S_1) et (S_2) tournent par rapport au bâti (S_0) (non représenté) (figure 22).

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié au bâti (S_0). La bague intérieure (S_1) et la bague extérieure (S_2) ont une liaison pivot d'axe (O, \vec{x}) avec (S_0). On pose :

$$\begin{cases} \vec{\Omega}(S_1/R) = \omega_1\vec{x} \\ \vec{\Omega}(S_2/R) = \omega_2\vec{x} \end{cases}$$

Le rouleau conique (S), de centre d'inertie G et masse m, roule sans glisser sur (S_1) et (S_2). Soit $R_1(O, \vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ le repère tel que :

$$\vec{OG} = r\vec{y}_1 \quad (r > 0).$$

Posons $\theta = (\vec{y}, \vec{y}_1)$.

(S) est de révolution matérielle autour de l'axe (G, \vec{z}_1). Définissons le repère $R_2(G, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ et posons $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_2)$ (α est constant) et

$$\vec{\Omega}(S/R_2) = \omega\vec{x}_2.$$

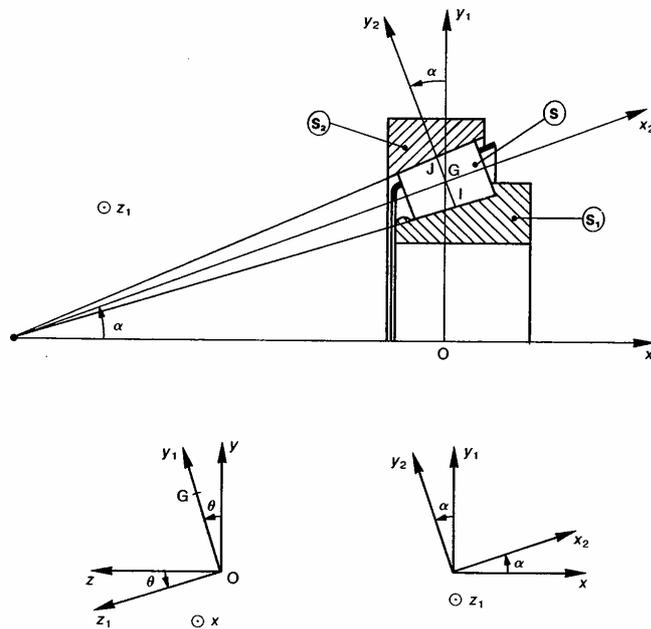


Fig. 22

(R_1 et R_2 sont deux repères liés à la cage du roulement.)
La matrice d'inertie de (S) est la suivante :

$$[I_G(S)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}_{(\bar{x}_1, -, -)}$$

Considérons le cercle de section droite du rouleau conique (S) situé dans le plan $(G, \bar{y}_2, \bar{z}_1)$.

Notons I et J les points de contact de ce cercle avec (S_1) et (S_2), et a son rayon.

Pour simplifier les calculs on posera :

$$\begin{cases} r_1 = r - a \cos \alpha \\ r_2 = r + a \cos \alpha \end{cases}$$

QUESTIONS

1° Déterminer le torseur cinématique au point G, de (S) dans son mouvement par rapport à R : ${}_G\{U(S/R)\}$, en fonction de $\omega_1, \omega_2, r_1, r_2$ et α .

2° Déterminer le moment cinétique au point G, de (S) dans son mouvement par rapport à R :

$$\vec{\sigma}_G(S/R).$$

3° Déterminer l'énergie cinétique de (S) dans son mouvement par rapport à R : $T(S/R)$.

RÉPONSES

$$1^\circ \{U(S/R)\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R) \\ {}_G\vec{V}(G/R) \end{Bmatrix}$$

avec

$$\vec{\Omega}(S/R) = \frac{\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2}{r_1 + r_2} \bar{x} + \frac{r_1 r_2 (\omega_2 - \omega_1)}{a(r_1 + r_2)} \bar{x}_2$$

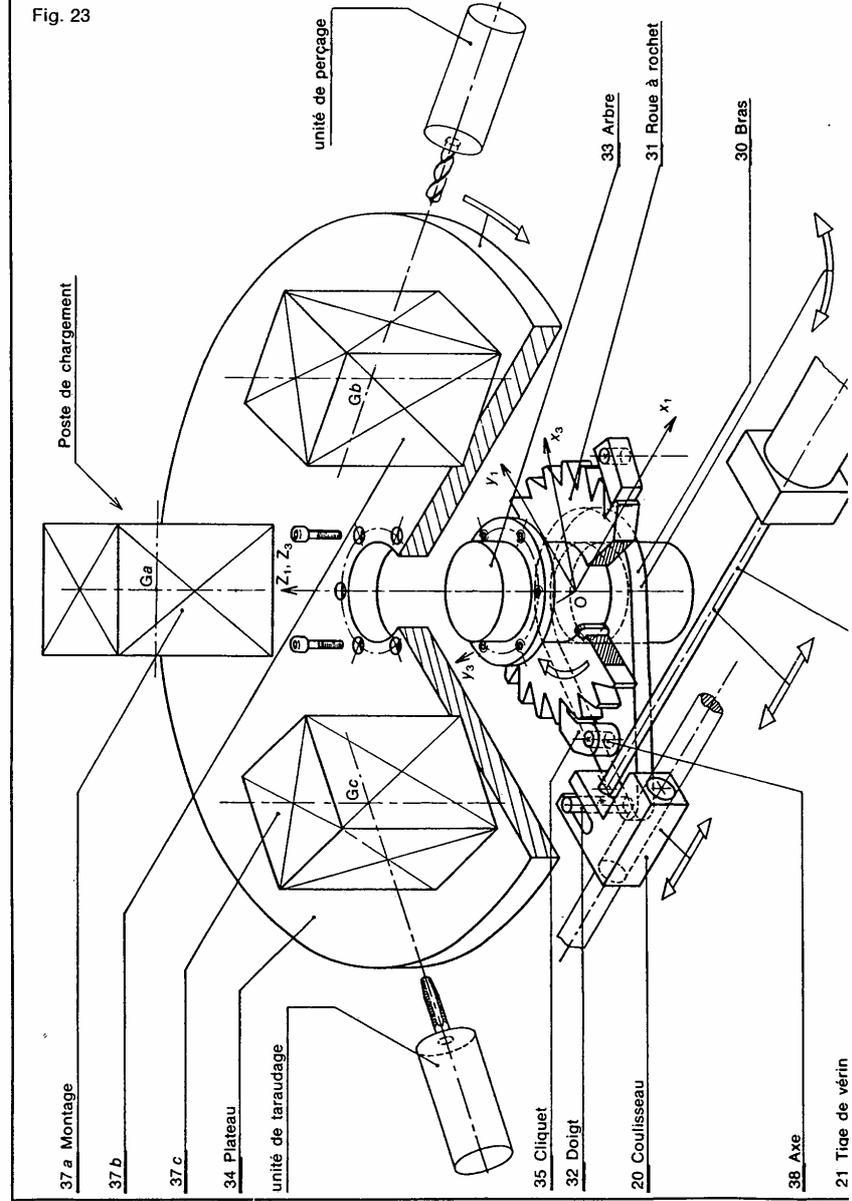
$$\vec{V}(G/R) = \frac{\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2}{2} \bar{z}_1.$$

$$2^\circ \vec{\sigma}_G(S/R) = A(\omega + \theta' \cos \alpha) \bar{x}_2 - B\theta' \sin \alpha \bar{y}_2.$$

$$3^\circ 2T(S/R) = (mr^2 + B \sin^2 \alpha) \theta'^2 + A(\omega + \theta' \cos \alpha)^2.$$

EXERCICES SANS RÉPONSE

Fig. 23



Un plateau tournant à commande pneumatique, équipé de trois montages identiques, permet un transfert rotatif de la pièce à usiner vers les postes de travail suivants (figure 23) :

- chargement et déchargement de la pièce
- perçage $\varnothing 4,8$
- taraudage M6.

Le coulisseau (20) guidé en translation sur le bâti (1), solidaire de la tige du vérin (21), déplace par sa rainure, un doigt (32) encastré dans le bras (30). Ce bras, libre en rotation autour de l'arbre (33) du plateau, entraîne, par l'intermédiaire du cliquet (35), une roue à rochet (31), solidaire de l'arbre. La rotation de 120° , nécessaire lors du transfert de la pièce est obtenue par deux rotations successives de 60° du plateau tournant.

Caractéristiques géométriques et d'inertie des solides de (3)

	FORME	MASSE	J_{Oz}	Nbre
Montage d'usinage	Parallépipède 70 x 70 mm, hauteur 100 mm	3,8 kg		3
Plateau	Disque $\varnothing 400$ mm épaisseur 18 mm	17,7 kg		1
Arbre	Cylindre $\varnothing 50$ mm hauteur 100 mm	1,5 kg		1
Mécanisme « rochet-cliquet »	Quelconque	1,4 kg	1570 kg/mm ²	1

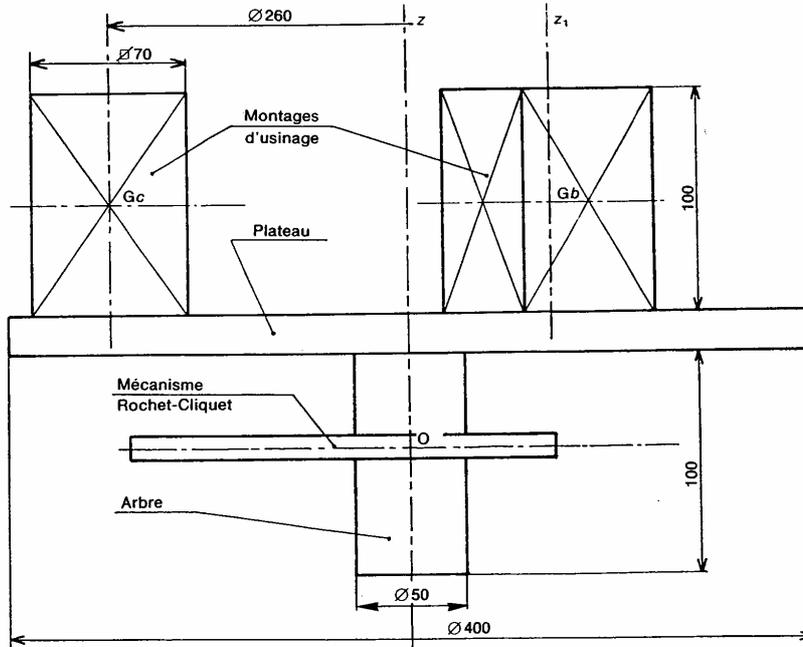


Fig. 24

Le repère $R_1(O, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$ est lié au bâti (1). Dans notre étude, toutes les pièces ayant le même mouvement (cinématiquement liées) sont repérées par des numéros de la même dizaine :

- (1) : sous-ensemble des pièces liées au bâti : (10, 11, 12, ...)
- (2) : sous-ensemble des pièces liées au coulisseau : (20, 21, ...)
- (3) : sous-ensemble des pièces en mouvement de rotation autour de l'axe (O, \bar{z}_1) : (30, 31, 32, ...)

Le but de l'étude est de déterminer le moment d'inertie par rapport à l'axe (O, \bar{z}_1) du sous-ensemble (3). La figure 24 définit les caractéristiques géométriques et d'inertie des solides (3).

QUESTIONS

- 1° Déterminer le moment d'inertie par rapport à l'axe (G, \bar{z}_1) d'un montage d'usinage.
- 2° En déduire le moment d'inertie par rapport à l'axe (O, \bar{z}_1) d'un montage d'usinage.
- 3° Déterminer le moment d'inertie par rapport à l'axe (O, \bar{z}_1) du sous-ensemble (3).

7 — On considère le problème plan suivant : Soit $R(O, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ un repère lié au bâti (S_0) d'un système bielle-manivelle d'un compresseur pneumatique (figure 25).

La manivelle (S_1) a une liaison pivot d'axe (O, \bar{z}) avec (S_0) . Soit $R_1(O, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$ un repère lié à (S_1) . On pose : $\alpha = (\bar{x}, \bar{x}_1)$.

Le coulisseau (S_2) a une liaison pivot glissant d'axe (O, \bar{x}) avec (S_0) .

La bielle (S_2) est assimilée à une tige rectiligne homogène d'extrémités A et B, de longueur $2l$, de dimensions transversales négligeables, de masse m et de centre d'inertie G.

(S_2) a une liaison rotule de centre A avec (S_1) , telle que $\overline{OA} = a\bar{x}_1$ ($a > 0$).

(S_2) a également une liaison rotule de centre B avec (S_0) . Le point B est situé sur l'axe (O, \bar{x}) . Soit $R_2(A, \bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$ un repère lié à (S_2) (on ne tient pas compte d'une rotation éventuelle de la tige sur elle-même) tel que $\overline{AB} = 2A\bar{G} = 2l\bar{x}_2$.

On pose $\beta = (\bar{x}, \bar{x}_2)$ (attention : β est négatif sur la figure).

QUESTIONS

- 1° Quelle relation y-a-t-il en α et β ?

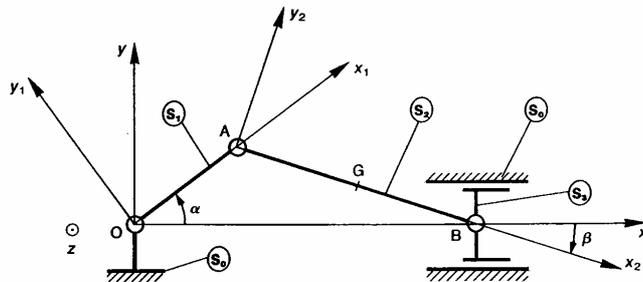


Fig. 25

2° Déterminer le moment cinétique au point A de dans son mouvement par rapport à $R : \vec{\sigma}_A(S_2/R)$.

3° Déterminer le moment dynamique au point A de dans son mouvement par rapport à $R : \vec{\delta}_A(S_2/R)$.

4° Déterminer l'énergie cinétique de (S_2) dans mouvement par rapport à $R : T(S_2/R)$.

*8 — La transmission de puissance de l'arbre mot (S_2) aux arbres (S_1) et (S_2) des roues motrices d véhicule, est faite par l'intermédiaire d'un différentiel schématisé figure 26.

On pose :

$$\vec{\Omega}(S_1/R) = \omega_1 \bar{x}$$

$$\vec{\Omega}(S_2/R) = \omega_2 \bar{x}$$

$R(O, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ est un repère lié au carter (S_0) différentiel.

Les arbres (S_1) et (S_2) , supposés identiques, ont liaison pivot d'axe (O, \bar{x}) avec (S_0) . Soit I leur moment d'inertie par rapport à l'axe (O, \bar{x}) .

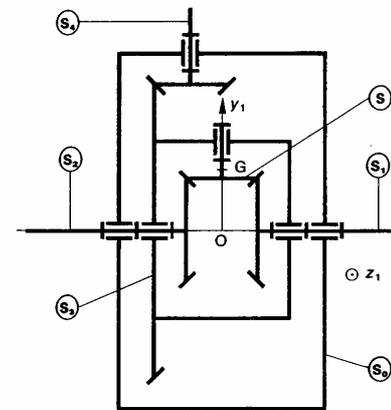


Fig. 26

Le porte satellite (S_3) a une liaison pivot d'axe (O, \bar{x}) avec (S_0) . Notons I_3 son moment d'inertie par rapport à l'axe (O, \bar{x}) .

On pose :

$$\vec{\Omega}(S_3/R) = \omega_3 \vec{x}$$

Soit $R_1(O, \vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié à (S_3) . Le satellite (S) a une liaison pivot d'axe (O, \vec{y}_1) avec (S_3) . (S) de révolution matérielle autour de (O, \vec{y}_1) , a pour masse m et centre d'inertie G . On pose :

$$\vec{OG} = d \vec{y}_1 \quad (d > 0).$$

La matrice d'inertie de (S) au point G est la suivante :

$$[I_G(S)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_{(-, \vec{y}_1, -)}$$

On pose :

$$\vec{\Omega}(S/R_1) = \omega \vec{y}_1.$$

Soit N le nombre de dents des roues coniques liées aux arbres (S_1) et (S_2) , et n le nombre de dents de la roue conique liée à (S) , engrénant avec les roues précédentes.

QUESTIONS

1° Quelle relation y a-t-il entre les vitesses angulaires :

- a) ω_1, ω_3 et ω ;
- b) ω_2, ω_3 et ω ?

2° Déterminer en projection sur \vec{x} , les moments cinétiques au point O , dans leur mouvement par rapport à R :

- a) de (S_1) : $\vec{x} \cdot \vec{\sigma}_O(S_1/R)$;
- b) de (S_2) : $\vec{x} \cdot \vec{\sigma}_O(S_2/R)$;
- c) de (S_3) : $\vec{x} \cdot \vec{\sigma}_O(S_3/R)$.

3° Déterminer le moment cinétique au point O de (S) dans son mouvement par rapport à R : $\vec{\sigma}_O(S/R)$.

4° Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble matériel (E) constitué par (S_1) , (S_2) , (S_3) et (S) dans leur mouvement par rapport à R .

5° En déduire l'énergie cinétique de (E) dans son mouvement par rapport à R , en fonction de ω_3 , dans les deux cas suivants :

- a) $\omega_1 = \omega_2$;
- b) $\omega_1 = 0$.

*9 — Un régulateur à boules, symétrique par rapport à son axe de rotation est représenté figure 27.

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié au bâti (S_0) . L'axe (S_1) a une liaison pivot d'axe (O, \vec{x}) avec (S_0) .

Soit $R_1(O, \vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié à (S_1) . On pose $\alpha = (\vec{y}, \vec{y}_1)$.

Le bras (S_2) a une liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_1) avec (S_1) telle que $\vec{OA} = a \vec{y}_1$ ($a > 0$).

Soit $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ un repère lié à (S_2) , l'axe (A, \vec{x}_2) étant dirigé suivant l'axe du bras. On pose : $\beta = (\vec{x}, \vec{x}_2)$. A l'extrémité du bras (S_2) est fixée une sphère (S) , pleine et homogène, de masse m , de rayon r et de centre d'inertie G . On pose : $\vec{AG} = l \vec{x}_2$ ($l > 0$).

Le bras (S_3) a une liaison pivot d'axe (B, \vec{z}_1) avec (S_2) telle que $\vec{AB} = b \vec{x}_2$ ($b > 0$), et une autre liaison pivot d'axe (C, \vec{z}_1) avec le coulisseau (S_4) , telle que le point C soit symétrique du point A par rapport à l'axe (B, \vec{y}_1) .

(S_4) a une liaison pivot glissant d'axe (O, \vec{x}) avec (S_1) , et pour axe de symétrie matérielle (O, \vec{x}) . Notons G_4 son centre d'inertie, M sa masse et I son moment d'inertie par rapport à (O, \vec{x}) .

QUESTIONS

1° Déterminer le moment cinétique au point G_4 de (S_4) dans son mouvement par rapport à R : $\vec{\sigma}_{G_4}(S_4/R)$.

2° Déterminer le moment cinétique au point G de (S) dans son mouvement par rapport à R : $\vec{\sigma}_G(S/R)$.

3° Déterminer la projection sur \vec{z}_1 du moment dynamique au point A de (S) dans son mouvement par rapport à R : $\vec{z}_1 \cdot \vec{\delta}_A(S/R)$.

4° Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble constitué par (S_4) , (S) et (S') (symétrique de (S)) dans leur mouvement par rapport à R : $T(S_4, S, S'/R)$.

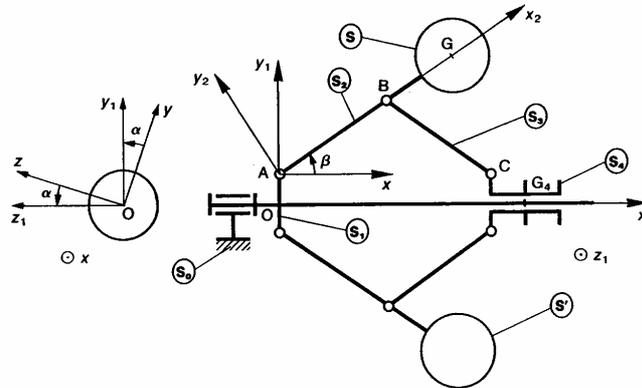


Fig. 27

10 — La figure 29 représente le vilebrequin d'un moteur Flat-Twin équipant un deux roues.

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à cette pièce, tel que l'axe (O, \vec{x}) soit confondu avec l'axe de rotation, et l'axe (O, \vec{y}) soit situé dans le plan contenant les axes des manetons. Le but de l'exercice est de déterminer les moments et les produits d'inertie du vilebrequin par rapport aux axes du repère R .

On suppose que le vilebrequin est exclusivement constitué de cylindres de révolution, homogènes, de masse volumique $\rho = 7,8 \text{ kg/dm}^3$. On néglige les usinages particuliers tels que le filetage, la rainure de clavette, le dégagement des portées et la gorge de segment d'arrêt.

Pour généraliser le calcul, nous adopterons le paramétrage de la figure 28.

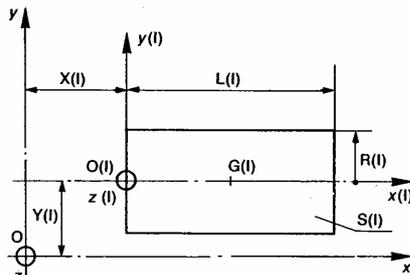


Fig. 28

Soient pour le cylindre $S(I)$:

- $L(I)$ la longueur,
- $R(I)$ le rayon,
- $(O(I), \vec{x}(I), \vec{y}(I), \vec{z}(I))$ un repère lié au cylindre, placé comme l'indique la figure,
- $X(I)$ l'abscisse de l'origine $O(I)$,
- $Y(I)$ l'ordonnée de l'origine $O(I)$,
- $G(I)$ le centre d'inertie du cylindre $S(I)$.

QUESTIONS

1° Déterminer les moments d'inertie du cylindre $S(I)$ par rapport aux axes du repère $(G(I), \vec{x}(I), \vec{y}(I), \vec{z}(I))$.

2° En appliquant le théorème de Huyghens, déterminer les moments et les produits d'inertie du cylindre $S(I)$ par rapport aux axes du repère R .

3° Déterminer, en utilisant de préférence un logiciel de calcul, les valeurs numériques des moments et des produits d'inertie du vilebrequin par rapport aux axes du repère R .

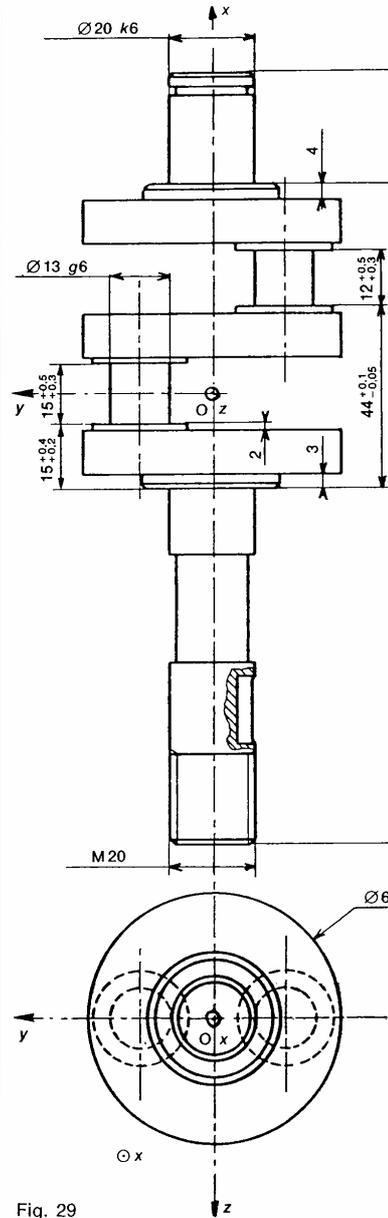


Fig. 29

2 principe fondamental de la dynamique

Le principe fondamental de la dynamique est la clef de voûte de la mécanique classique. Après des siècles d'études et de réflexion ce principe fut énoncé pour la première fois par NEWTON vers la fin du XVII^e siècle.

Ce principe établit une relation entre le mouvement d'un ensemble matériel et les actions mécaniques qui lui sont appliquées. Il permet d'expliquer et de prévoir avec une excellente précision les phénomènes mécaniques « classiques ».

1. PRINCIPE FONDAMENTAL

1.1. ÉNONCÉ

Il existe au moins un repère R_g , appelé repère galiléen, et au moins une chronologie, appelée chronologie galiléenne, tels que pour tout sous-ensemble matériel (e) d'un ensemble matériel (E) , le torseur dynamique de (e) dans son mouvement par rapport à R_g soit égal au torseur des actions mécaniques extérieures à (e) .

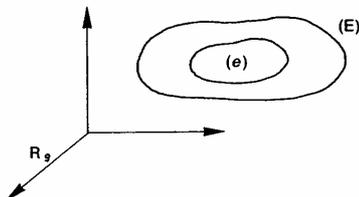


Fig. 1

Notons (\bar{e}) l'extérieur de (e) .

Le principe fondamental de la dynamique formule l'existence d'au moins un repère R_g et d'au moins une chronologie (une façon de mesurer le temps) tels que l'on puisse écrire :

$$\{\mathcal{D}(e/R_g)\} = \{\mathcal{C}(\bar{e} \rightarrow e)\} \quad \forall (e) \subset (E).$$

1.2. REPÈRE GALILÉEN

Pour la plupart des mécanismes étudiés en laboratoire, un repère lié à la Terre constitue une très bonne approximation d'un repère galiléen. Exceptions : mouvements que l'on peut suivre pendant un temps assez long (pendule de Foucault) et mouvements très rapides (gyroscope tournant à grande vitesse).

1.3. CHRONOLOGIE GALILÉENNE

Une chronologie galiléenne est obtenue par les horloges classiques (oscillation d'un quartz, mouvement de certains astres, ...).

Un sablier ne constitue pas une horloge galiléenne car la masse de sable écoulee n'est pas proportionnelle au temps mesuré par les horloges classiques.

REMARQUE

En mécanique classique les deux repères d'espace et de temps sont supposés indépendants, ce qui n'est pas le cas en mécanique relativiste.

1.4. THÉORÈMES GÉNÉRAUX DE LA DYNAMIQUE

En exprimant que les deux torseurs intervenant dans le principe fondamental ont même résultante générale et même moment résultant en tout point, on

obtient deux théorèmes appelés théorèmes généraux de la dynamique.

Soient m la masse et G le centre d'inertie du sous-ensemble matériel (e) de l'ensemble matériel (E) en mouvement par rapport au repère galiléen R_g . Posons, en un point A quelconque :

$$\{\mathcal{D}(e/R_g)\} = \begin{cases} m\vec{\Gamma}(G/R_g) \\ \delta_A(e/R_g) \end{cases}$$

et

$$\{\mathcal{C}(\vec{e} \rightarrow e)\} = \begin{cases} \vec{R}(\vec{e} \rightarrow e) \\ \vec{M}_A(\vec{e} \rightarrow e) \end{cases}$$

Théorème de la résultante dynamique

Pour tout sous-ensemble matériel (e) de l'ensemble matériel (E) en mouvement par rapport au repère galiléen R_g , la résultante dynamique de (e) dans son mouvement par rapport à R_g est égale à la résultante générale du torseur associé aux actions mécaniques extérieures à (e).

Soit $m\vec{\Gamma}(G/R_g) = \vec{R}(\vec{e} \rightarrow e)$.

REMARQUE

Une force d'un newton est la force qui provoque une accélération de 1 m/s^2 au centre d'inertie d'un ensemble matériel ayant une masse de 1 kilogramme.

Théorème du moment dynamique

Pour tout sous-ensemble matériel (e) de l'ensemble matériel (E) en mouvement par rapport au repère galiléen R_g , le moment dynamique de (e) dans son mouvement par rapport à R_g est égal au moment résultant du torseur associé aux actions mécaniques extérieures à (e).

Soit $\delta_A(e/R_g) = \vec{M}_A(\vec{e} \rightarrow e) \quad \forall A$.

1.5. ÉQUATIONS DE MOUVEMENT

Soit un ensemble matériel (E) dont la position par rapport au repère galiléen R_g dépend de n paramètres $q_i(t)$ ($i = 1$ à n).

La projection sur un axe d'une équation vectorielle traduisant l'un des théorèmes généraux appliqué à un sous-ensemble matériel (e) de (E), donne une équation scalaire, qui est une *équation différentielle du second ordre*, non linéaire en général.

Dans cette équation scalaire peuvent figurer :

- des paramètres $q_i(t)$,
- des dérivées premières et secondes des paramètres par rapport à la date t : $\dot{q}_i(t)$ et $\ddot{q}_i(t)$,
- la date t ,
- des données du problème (données géométriques, d'inertie, composantes connues d'actions mécaniques, ...),
- des composantes inconnues d'actions mécaniques.

Définition

Une équation de mouvement est une équation différentielle du second ordre traduisant un théorème général, dans laquelle ne figure aucune composante inconnue d'action mécanique.

REMARQUE

Une équation de mouvement peut être obtenue en éliminant, entre plusieurs équations, des composantes inconnues d'actions mécaniques.

L'ensemble des équations de mouvement qu'on peut écrire pour un ensemble matériel (E) est un système d'équations différentielles, dont il est souvent difficile de trouver la ou les solutions fonction de conditions initiales données.

Les conditions initiales du mouvement de (E) par rapport à R_g , à la date t_0 , sont constituées de n paramètres $q_i(t_0)$ et de leurs dérivées premières $\dot{q}_i(t_0)$.

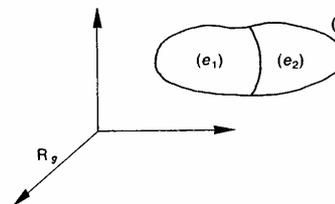
Intégrale première du mouvement

Une intégrale première du mouvement est une équation différentielle du premier ordre de la forme : $f(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) = \text{constante}$, obtenue par intégration d'une équation de mouvement.

Dans la pratique il est très utile de mettre en évidence, avant tout calcul, des intégrales premières du mouvement (voir la deuxième application au paragraphe 4).

2. THÉORÈME DES ACTIONS MUTUELLES

Ce théorème a été démontré dans le cas particulier de la statique. Démontrons-le en dynamique. Soit (E) un ensemble matériel en mouvement par rapport au repère galiléen R_g . Soit une partition de (E) en deux sous-ensembles matériels (e_1) et (e_2) (figure 2).



Appliquons le principe fondamental de la dynamique à (e_1) :

$$\{\mathcal{D}(e_1/R_g)\} = \{\mathcal{C}(\vec{e}_1 \rightarrow e_1)\}$$

(\vec{e}_1), l'extérieur de (e_1) est constitué par l'extérieur de (E) et (e_2). Alors :

$$\{\mathcal{D}(e_1/R_g)\} = \{\mathcal{C}(\vec{E} \rightarrow e_1)\} + \{\mathcal{C}(e_2 \rightarrow e_1)\}$$

Appliquons le principe fondamental de la dynamique à (e_2) :

$$\{\mathcal{D}(e_2/R_g)\} = \{\mathcal{T}(\bar{e}_2 \rightarrow e_2)\}$$

(\bar{e}_2) , l'extérieur de (e_2) est constitué par l'extérieur de (E) et (e_1) . Alors :

$$\{\mathcal{D}(e_2/R_g)\} = \{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow e_2)\} + \{\mathcal{T}(e_1 \rightarrow e_2)\}. \quad (2)$$

Ajoutons membre à membre les relations (1) et (2) :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{D}(e_1/R_g)\} + \{\mathcal{D}(e_2/R_g)\} &= \{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow e_1)\} + \{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow e_2)\} \\ &+ \{\mathcal{T}(e_2 \rightarrow e_1)\} + \{\mathcal{T}(e_1 \rightarrow e_2)\}. \quad (3) \end{aligned}$$

La somme des deux torseurs dynamiques de (e_1) et (e_2) dans leur mouvement par rapport à R_g , est égale au torseur dynamique de (E) dans son mouvement par rapport à R_g . En effet, comme $(e_1) \cap (e_2) = \emptyset$, on a, par exemple, entre les résultantes dynamiques la relation :

$$\int_{P \in (e_1) \cup (e_2)} \bar{\Gamma}(P/R_g) dm = \int_{P \in (e_1)} \bar{\Gamma}(P/R_g) dm + \int_{P \in (e_2)} \bar{\Gamma}(P/R_g) dm.$$

La somme des deux torseurs $\{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow e_1)\}$ et $\{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow e_2)\}$ représente l'action mécanique de l'extérieur de (E) sur (e_1) et (e_2) , c'est-à-dire sur (E) .

Par conséquent la relation (3) s'écrit :

$$\{\mathcal{D}(E/R_g)\} = \{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E)\} + \{\mathcal{T}(e_2 \rightarrow e_1)\} + \{\mathcal{T}(e_1 \rightarrow e_2)\} \quad (4)$$

or l'application du principe fondamental de la dynamique à (E) dans son mouvement par rapport à R_g permet d'écrire que :

$$\{\mathcal{D}(E/R_g)\} = \{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E)\}.$$

Par suite la relation (4) devient :

$$\{\mathcal{T}(e_2 \rightarrow e_1)\} = -\{\mathcal{T}(e_1 \rightarrow e_2)\}.$$

Théorème

L'action mécanique du sous ensemble matériel (e_2) sur le sous ensemble matériel (e_1) est opposée à l'action mécanique de (e_1) sur (e_2) .

3. CAS PARTICULIERS

L'écriture du principe fondamental de la dynamique se ramène à celle du principe fondamental de la statique, lorsque le torseur dynamique du sous ensemble matériel (e) de l'ensemble matériel (E) dans son mouvement par rapport au repère galiléen R_g est nul.

Ce torseur est nul, en particulier, dans les trois cas suivants :

Premier cas :

(e) est en équilibre par rapport à R_g . Le principe fondamental de la statique énoncé au chapitre 2 de statique n'est qu'un cas particulier du principe fondamental de la dynamique.

Deuxième cas :

(e) est de masse nulle.

Cette hypothèse lorsqu'elle est acceptable simplifie beaucoup l'étude.

EXEMPLE 1

L'objectif du chapitre 3 de statique (hyperstatisme et mobilité des mécanismes) n'étant ni une étude de mouvement, ni un calcul d'action mécanique de contact, nous avons supposé, pour simplifier l'étude, que toutes les pièces étaient de masse nulle.

EXEMPLE 2

Deux pièces (S_1) et (S_2) ont une liaison pivot glissant d'axe (O, \bar{x}) .

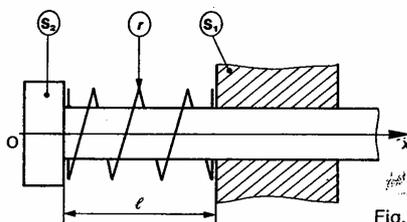


Fig. 3

Un ressort linéaire (r) de traction compression d'axe (O, \bar{x}) , supposé de masse nulle, est intercalé entre (S_1) et (S_2) . (r) a pour raideur K et pour longueur à vide l_0 .

Supposons l'action mécanique du ressort sur (S_1) représentée par le torseur :

$$\{\mathcal{T}(r \rightarrow S_1)\} = \begin{Bmatrix} -K(l-l_0)\bar{x} \\ \bar{0} \end{Bmatrix}$$

(l : longueur sous charge du ressort).

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au ressort (r) de masse nulle, s'écrit :

$$\{\mathcal{T}(\bar{r} \rightarrow r)\} = \{\bar{0}\}$$

soit $\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow r)\} + \{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow r)\} = \{\bar{0}\}$.

Par suite, compte tenu du théorème des actions mutuelles, l'action mécanique du ressort sur (S_2) est représentée par le torseur :

$$\{\mathcal{T}(r \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} K(l-l_0)\bar{x} \\ \bar{0} \end{Bmatrix}$$

* Troisième cas :

Supposons que (e) soit un solide (S) de masse m , ayant une liaison pivot d'axe (O, \bar{z}_g) avec un bâti (S_0) , auquel est lié le repère galiléen $R_g(O, \bar{x}_g, \bar{y}_g, \bar{z}_g)$.

Soit $R(O, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}_g)$ un repère lié à (S) . On pose $\theta = (\bar{x}_g, \bar{x})$.

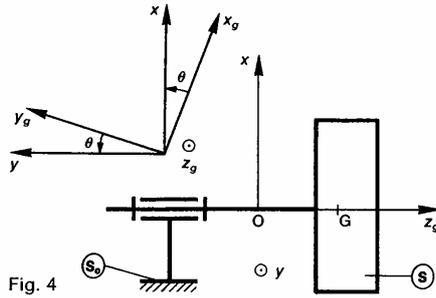


Fig. 4

Supposons également que :

- (S) soit animé d'un mouvement de rotation uniforme par rapport à R_g ($\theta' = \text{constante}$),
- le centre d'inertie G de (S) soit sur l'axe (O, \vec{z}_g) et que cet axe soit principal d'inertie pour (S) (conditions d'équilibrage dynamique, voir *paragraphe 6*).

La matrice d'inertie de (S) au point O, dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_g)$, est donc de la forme :

$$[I_0(S)] = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_g)}$$

Montrons dans ces conditions que le torseur dynamique de (S) dans son mouvement par rapport à R_g est nul.

Ce torseur dynamique s'écrit au point O :

$$\{\mathcal{D}(S/R_g)\} = \begin{Bmatrix} m\vec{\Gamma}(G/R_g) \\ \vec{\delta}_0(S/R_g) \end{Bmatrix}$$

Le point G étant fixe par rapport à R_g , le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(G/R_g)$ est nul.

Le point O étant fixe par rapport à R_g , la relation entre le moment dynamique $\vec{\delta}_0(S/R_g)$ et le moment cinétique $\vec{\sigma}_0(S/R_g)$ s'écrit :

$$\vec{\delta}_0(S/R_g) = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_0(S/R_g) \right]_{R_g} \quad (5)$$

et le moment cinétique se calcule à partir de l'opérateur d'inertie par la relation :

$$\vec{\sigma}_0(S/R_g) = \vec{J}_0(S, \vec{\Omega}(S/R_g)).$$

Avec $\vec{\Omega}(S/R_g) = \theta' \vec{z}_g$, la matrice colonne associée au vecteur $\vec{\sigma}_0(S/R_g)$ est obtenue par la multiplication matricielle suivante :

$$[\vec{\sigma}_0(S/R_g)] = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta' \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_g)}$$

d'où $\vec{\sigma}_0(S/R_g) = C\theta' \vec{z}_g$.
 θ' étant constant, le moment cinétique $\vec{\sigma}_0(S/R_g)$ est constant dans la base de R_g .

Par suite (relation 5) : $\vec{\delta}_0(S/R_g) = \vec{0}$.

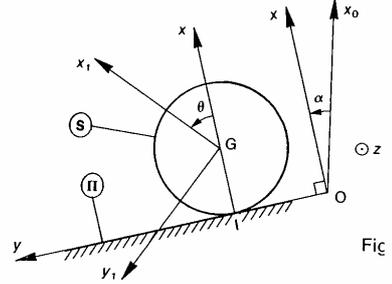
Le torseur dynamique de (S) dans son mouvement par rapport à R_g est donc nul.

4. APPLICATIONS

Poursuivons deux applications (cylindre sur un π incliné et toupie) commencées dans le cours cinétique du chapitre précédent.

4.1. APPLICATION 1

Un cylindre de révolution (S) roule sans glisser sur plan incliné (Π), son axe restant constamment orthogon à la ligne de plus grande pente du plan.



Fig

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère galiléen lié au plan (Π), l'axe (O, \vec{y}) étant dirigé suivant la ligne de plus grande pente. Soit $\vec{g} = -g\vec{x}_0$ l'accélération de la pesanteur, \vec{x}_0 étant dirigé suivant la verticale ascendante.

On pose : $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x})$ ($0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$).

(S) est homogène, de masse m , de rayon a , de centre d'inertie G, et a pour axe de révolution (G, \vec{z}) .

(S) est en contact avec le plan (Π) suivant l'axe (I, \vec{z}) que $\vec{IG} = a\vec{x}$. Soit f le coefficient de frottement entre deux solides en contact.

L'action mécanique de contact de (Π) sur (S) est défini par le torseur :

$$\{\mathcal{T}(\Pi \rightarrow S)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

avec \vec{R} de la forme : $\vec{R} = X\vec{x} + Y\vec{y}$. Soit $R_I(G, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ repère lié à (S). On pose : $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_1)$.

QUESTION 1

Déterminer l'équation de mouvement de (S) par rapport (Π).

RÉPONSE

Pour choisir l'équation scalaire traduisant les théorèmes généraux, qui soit équation de mouvement, examinons les torseurs des deux actions mécaniques s'exerçant sur (S) :

- Action mécanique de la pesanteur (connue)

$$\{\mathcal{T}(g \rightarrow S)\} = \begin{Bmatrix} -mg\vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

- Action mécanique du plan (Π) (inconnue)

$$\{\mathcal{T}(\Pi \rightarrow S)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad (\vec{R} = X\vec{x} + Y\vec{y}).$$

Pour obtenir directement une équation scalaire ne fais pas intervenir d'inconnue de liaison (X ou Y) il faut

appliquer à (S), dans son mouvement par rapport à R, le théorème du moment dynamique au point I, en projection sur \vec{z} .

Soit $\vec{z} \cdot \vec{\delta}_I(S/R) = \vec{z} \cdot \vec{M}_I(\vec{S} \rightarrow S)$
le moment résultant par rapport à l'axe (I, \vec{z}) des actions mécaniques extérieures à (S) est égal à :

$$\vec{z} \cdot \vec{M}_I(\vec{S} \rightarrow S) = \vec{z} \cdot (\vec{IC} \wedge -mg\vec{x}_0),$$

soit avec $\vec{IC} = a\vec{x}$

$$\vec{z} \cdot \vec{M}_I(\vec{S} \rightarrow S) = mga \sin \alpha$$

le moment dynamique $\vec{\delta}_I(S/R)$ a été calculé au *paragraphe 13.1 du chapitre 2*.

$$\vec{\delta}_I(S/R) = \frac{3}{2} ma^2 \theta'' \vec{z}.$$

Par conséquent l'équation de mouvement de (S) par rapport à (II) s'écrit :

$$\frac{3}{2} ma^2 \theta'' = mga \sin \alpha$$

ou

$$\theta'' = \frac{2}{3} \frac{g}{a} \sin \alpha$$

équation différentielle du second ordre, très simple, de la forme $\theta'' = \text{constante}$.

QUESTION 2

Soit y l'abscisse du centre d'inertie G de (S) sur l'axe (O, \vec{y}). On suppose que $y = 0$ lorsque $\theta = 0$.

Exprimer l'équation de mouvement de (S) par rapport à (II) en fonction de y'' .

RÉPONSE

(S) roule sans glisser sur (II). Alors : $y = a\theta$ et $y'' = a\theta''$. Par suite l'équation de mouvement s'écrit :

$$y'' = \frac{2}{3} g \sin \alpha. \quad (6)$$

QUESTION 3

Sachant qu'à la date $t = 0$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$, déterminer, à tout instant, le paramètre $y(t)$ définissant la position du centre d'inertie G de (S) dans R.

RÉPONSE

Intégrons la relation (6) :

une première fois : $y' = \frac{2}{3} gt \sin \alpha + C$

une seconde fois : $y = \frac{1}{3} gt^2 \sin \alpha + Ct + D$

Avec les conditions initiales données, les deux constantes C et D sont nulles.

Par suite :

$$y = \frac{1}{3} gt^2 \sin \alpha.$$

QUESTION 4

Déterminer la valeur minimale de l'angle α pour que (S) roule sans glisser sur (II).

RÉPONSE

(S) roule sans glisser sur (II) si à chaque instant : $|Y| \leq f|X|$.

Les composantes X et Y de la résultante générale \vec{R} de l'action mécanique de (II) sur (S) seront obtenues en appliquant le théorème de la résultante dynamique à (S), dans son mouvement par rapport à R, en projection sur \vec{x} et \vec{y} .

Ce théorème s'écrit :

$$m\vec{\Gamma}(G/R) = \vec{R}(\vec{S} \rightarrow S)$$

soit

$$m\vec{\Gamma}(G/R) = -mg\vec{x}_0 + \vec{R}$$

sachant que

$$\vec{\Gamma}(G/R) = y''\vec{y} = \frac{2}{3} g \sin \alpha \vec{y}$$

$$\vec{R} = X\vec{x} + Y\vec{y}.$$

Cette égalité vectorielle devient en projection

— sur \vec{x} : $0 = -mg \cos \alpha + X$

— sur \vec{y} : $\frac{2}{3} mg \sin \alpha = mg \sin \alpha + Y$

d'où $\begin{cases} X = mg \cos \alpha \\ Y = -\frac{1}{3} mg \sin \alpha \end{cases}$

la condition de roulement sans glissement étant :

$$|Y| \leq f|X|$$

soit $\frac{1}{3} mg \sin \alpha \leq fmg \cos \alpha$ l'angle α doit être tel que :

$$\text{tg } \alpha \leq 3f.$$

*4.2. APPLICATION 2

Considérons une toupie (S) de masse m , de centre d'inertie G et d'axe de symétrie matérielle (O, \vec{z}_1), dont la pointe O reste immobile sur un plan (II).

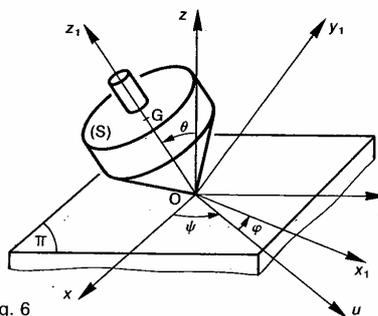


Fig. 6

Soit R(O, \vec{x} , \vec{y} , \vec{z}) un repère galiléen lié au plan (II), l'axe (O, \vec{z}) étant dirigé suivant la verticale ascendante. On note $\vec{g} = -g\vec{z}$ l'accélération de la pesanteur.

La liaison entre (II) et (S) est une liaison ponctuelle avec frottement de normale (O, \vec{z}). On pose :

$$\{\mathcal{C}(\text{II} \rightarrow S)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Dynamique

Soit $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié à (S). On pose $\vec{OG} = l\vec{z}_1$ ($l > 0$).

La matrice d'inertie de (S) au point O est de la forme :

$$[I_0(S)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_1)}$$

La position de la base de R_1 par rapport à la base de R est définie par les trois angles d'Euler ψ, θ, φ (Première base intermédiaire : $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$, deuxième base intermédiaire : $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_1)$).

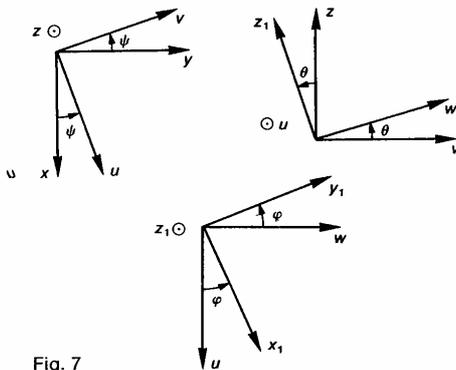


Fig. 7

QUESTION 1

Déterminer les équations de mouvement de (S) par rapport à (II).

RÉPONSE

La position de (S) par rapport à (II) étant définie par trois paramètres indépendants ψ, θ, φ , les équations de mouvement sont au nombre de 3.

Pour choisir des équations scalaires traduisant les théorèmes généraux, qui soient équations de mouvement, examinons les torseurs des deux actions mécaniques s'exerçant sur (S).

— Action mécanique de la pesanteur (connue)

$$\{\mathcal{T}(g \rightarrow S)\} = \begin{Bmatrix} -mg\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$$

— Action mécanique du plan (II) (inconnue)

$$\{\mathcal{T}(\Pi \rightarrow S)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O$$

Pour obtenir trois équations scalaires ne faisant pas intervenir d'inconnue de liaison (composante de \vec{R}), il faut appliquer à (S), dans son mouvement par rapport à R, le théorème du moment dynamique au point O, en projection sur trois vecteurs unitaires indépendants.

Pour choisir ces trois vecteurs unitaires, calculons au préalable le moment résultant au point O des actions mécaniques extérieures à (S).

$$\vec{M}_0(\vec{S} \rightarrow S) = \vec{OG} \wedge -mg\vec{z}$$

soit avec $\vec{OG} = l\vec{z}_1$

$$\vec{M}_0(\vec{S} \rightarrow S) = mgl \sin \theta \vec{u}$$

la projection de ce moment est donc nulle sur des vecteurs unitaires perpendiculaires à \vec{u} . Sachant qu'il y a au maximum deux vecteurs unitaires indépendants perpendi-

culaires à \vec{u} , écrivons l'équation vectorielle déduite du théorème du moment dynamique en projection

sur \vec{z} , car \vec{z} est fixe dans la base de R,
sur \vec{z}_1 , car \vec{z}_1 est l'axe de révolution matérielle de
sur \vec{u} , car $\vec{M}_0(\vec{S} \rightarrow S)$ a pour direction \vec{u} .

D'où les trois équations de mouvement :

$$\begin{cases} \vec{z} \cdot \vec{\delta}_0(S/R) = 0 \\ \vec{z}_1 \cdot \vec{\delta}_0(S/R) = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{\delta}_0(S/R) = mgl \sin \theta. \end{cases}$$

Compte tenu des résultats acquis au paragraphe 13. chapitre 2, les trois équations de mouvement s'écrivent

$$\frac{d}{dt} [A\psi' \sin^2 \theta + C(\varphi' + \psi' \cos \theta) \cos \theta] = 0$$

$$C \frac{d}{dt} (\varphi' + \psi' \cos \theta) = 0$$

$$A\theta'' + \psi' \sin \theta [C(\varphi' + \psi' \cos \theta) - A\psi' \cos \theta] = mgl \sin \theta$$

La deuxième équation donne l'intégrale première mouvement :

$$\varphi' + \psi' \cos \theta = \text{constante} = r_0.$$

La première équation donne l'intégrale première mouvement :

$$A\psi' \sin^2 \theta + C r_0 \cos \theta = \text{constante}.$$

La troisième équation s'écrit :

$$A\theta'' + \psi' \sin \theta [C r_0 - A\psi' \cos \theta] = mgl \sin \theta.$$

QUESTION 2

A quelles conditions existe-t-il des mouvements tels $\psi' = \text{constante} = \psi'_0$?

RÉPONSE

Si ψ' est constant l'équation (8) impose que

$$\theta = \text{constante} = \theta_0.$$

L'équation (7) indique alors que $\varphi' = \text{constante} = \varphi'_0$.

L'équation (9) établit une relation entre ψ'_0, θ_0 et φ'_0 .

Si on suppose $\sin \theta_0 \neq 0$ cette équation s'écrit :

$$\psi'_0 [C r_0 - A\psi'_0 \cos \theta_0] = mgl.$$

Dans ce mouvement dit *stationnaire*, l'axe de la t décrit d'un mouvement uniforme, un cône d'axe (O) de demi-angle au sommet θ_0 .

QUESTION 3

Considérons des mouvements où

$$\psi' = \text{constante} = \psi'_0,$$

$$\theta = \text{constante} = \theta_0,$$

$$\varphi' = \text{constante} = \varphi'_0.$$

En admettant que la rotation propre φ'_0 est très grande devant ψ'_0 et θ_0 , déterminer φ'_0 en fonction de ψ'_0 . supposera A et C du même ordre de grandeur.)

Application numérique :

$$m = 30 \text{ g}$$

$$g = 10 \text{ m/s}^2$$

$$l = 3 \text{ cm}$$

$$C = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\psi'_0 = \pi \text{ rad/s}.$$

RÉPONSE

Si φ'_0 est très grand devant ψ'_0 et θ_0 , l'équation (7) indique que $\varphi'_0 = r_0$. Par suite, dans l'équation (10) le terme $A\psi'_0 \cos \theta_0$ est négligeable devant $Cr_0 = C\varphi'_0$. Cette équation s'écrit donc :

$$\psi'_0 C\varphi'_0 = mgl$$

d'où

$$\varphi'_0 = \frac{mgl}{C\psi'_0}$$

Application numérique : $\varphi'_0 = 191,11 \text{ rad/s}$ (1825 tr/min).

5 EXPRESSION DU PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE DANS UN REPERE NON GALILÉEN

Il est parfois plus simple d'étudier le mouvement d'un sous-ensemble matériel (e) d'un ensemble matériel (E) par rapport à un repère R qui ne soit pas galiléen. C'est pourquoi nous allons examiner l'influence d'un changement de repère sur l'expression du principe fondamental de la dynamique.

Soient R_g un repère galiléen et R un repère ayant un mouvement quelconque, mais connu, par rapport à R_g .

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à (e) dans son mouvement par rapport à R_g s'écrit :

$$\{\mathcal{D}(e/R_g)\} = \{\mathcal{C}(\bar{e} \rightarrow e)\}. \quad (11)$$

Le torseur dynamique a pour éléments de réduction en un point A quelconque :

$$\{\mathcal{D}(e/R_g)\} = \left\{ \begin{array}{l} \int_{P \in e} \vec{\Gamma}(P/R_g) dm \\ \int_{P \in e} \overline{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R_g) dm \end{array} \right\}.$$

Pour faire apparaître le repère R dans ces éléments de réduction, utilisons la relation de composition des vecteurs accélération, au point P , entre les repères R et R_g (relation (13) du paragraphe 6 du chapitre 4 de cinématique) :

$$\vec{\Gamma}(P/R_g) = \vec{\Gamma}(P/R) + \vec{\Gamma}(P \in R/R_g) + 2\vec{\Omega}(R/R_g) \wedge \vec{V}(P/R).$$

Considérons les trois torseurs suivants :

— Le torseur dynamique de (e) dans son mouvement par rapport à R :

$$\{\mathcal{D}(e/R)\} = \left\{ \begin{array}{l} \int_{P \in e} \vec{\Gamma}(P/R) dm \\ \int_{P \in e} \overline{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R) dm \end{array} \right\}.$$

— Le torseur des effets d'inertie d'entraînement sur (e) dans son mouvement par rapport à R et R_g :

$$\{\mathcal{D}_{ie}(e, R/R_g)\} = \left\{ \begin{array}{l} - \int_{P \in e} \vec{\Gamma}(P \in R/R_g) dm \\ - \int_{P \in e} \overline{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P \in R/R_g) dm \end{array} \right\}.$$

— Le torseur des effets d'inertie de Coriolis sur (e) dans son mouvement par rapport à R et R_g :

$$\{\mathcal{D}_{ic}(e, R/R_g)\} = \left\{ \begin{array}{l} - \int_{P \in e} 2\vec{\Omega}(R/R_g) \wedge \vec{V}(P/R) dm \\ - \int_{P \in e} \overline{AP} \wedge [2\vec{\Omega}(R/R_g) \wedge \vec{V}(P/R)] dm \end{array} \right\}.$$

Par suite, entre ces trois torseurs et le torseur dynamique de (e) dans son mouvement par rapport à R_g existe la relation :

$$\{\mathcal{D}(e/R)\} = \{\mathcal{D}(e/R_g)\} + \{\mathcal{D}_{ie}(e, R/R_g)\} + \{\mathcal{D}_{ic}(e, R/R_g)\}.$$

Compte tenu de la relation (11) le principe fondamental de la dynamique s'écrit dans le repère R :

$$\{\mathcal{D}(e/R)\} = \{\mathcal{C}(\bar{e} \rightarrow e)\} + \{\mathcal{D}_{ie}(e, R/R_g)\} + \{\mathcal{D}_{ic}(e, R/R_g)\}. \quad (12)$$

Par conséquent, le principe fondamental de la dynamique s'applique relativement à tout repère, à condition d'ajouter au torseur des actions mécaniques extérieures, le torseur des effets d'inertie d'entraînement et le torseur des effets d'inertie de Coriolis.

REMARQUE

Si le repère R est en translation rectiligne uniforme par rapport au repère galiléen R_g :

$$\vec{\Gamma}(P \in R/R_g) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{\Omega}(R/R_g) = \vec{0}.$$

Par suite les deux torseurs des effets d'inertie d'entraînement et de Coriolis sont nuls, et le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors dans le repère R :

$$\{\mathcal{D}(e/R)\} = \{\mathcal{C}(\bar{e} \rightarrow e)\}$$

ce qui conduit à la conclusion que tout repère R en translation rectiligne uniforme par rapport à un repère galiléen, est aussi galiléen.

Application : Accélération de la pesanteur

Étudions l'équilibre d'un pendule simple à la surface de la terre. Pour cela, considérons le repère galiléen

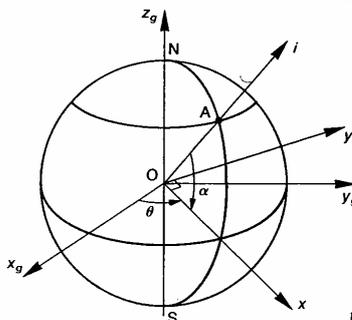


Fig. 8

Dynamique

$R_g(O, \vec{x}_g, \vec{y}_g, \vec{z}_g)$ ayant pour origine le centre d'inertie de la terre et dont les axes ont des directions fixes par rapport à certaines étoiles. L'axe (O, \vec{z}_g) est orienté du pôle sud vers le pôle nord.

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à la terre. On pose $\theta = (\vec{x}_g, \vec{x})$. $\theta' = \text{constante} = \omega$, avec $\omega = 1 \text{ tr}/24 \text{ h}$.

Soit A un point de la surface de la terre situé dans le plan (O, \vec{z}_g, \vec{x}) . On pose : $\overline{OA} = r\vec{i}$ (r : rayon de la terre) et $\alpha = (\vec{i}, \vec{x})$ (α représente la latitude du point A).

En ce point A on considère un pendule simple immobile par rapport à la terre.

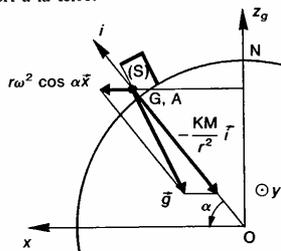


Fig. 9

Ce pendule simple est constitué par une sphère (S) de masse m , de centre d'inertie G, suspendue à un fil. Sur (S) s'exercent deux actions mécaniques :

— l'action mécanique du fil, représentée par le torseur :

$$\{\mathcal{T}(\text{fil} \rightarrow S)\} = \begin{Bmatrix} \vec{T} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$$

\vec{T} ayant même direction que le fil.

— L'action mécanique de la terre, représentée par le torseur :

$$\{\mathcal{T}(\text{terre} \rightarrow S)\} = \begin{Bmatrix} \vec{F} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$$

avec \vec{F} (force d'attraction newtonienne) définie par :

$$\vec{F} = -K \frac{mM}{r^2} \vec{i}$$

avec : $\begin{cases} K : \text{constante de gravitation universelle} \\ \quad (K = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ dans le système MKSA}) \\ m : \text{masse de (S)} \\ M : \text{masse de la Terre} \\ r : \text{rayon de la Terre.} \end{cases}$

La résultante générale des actions mécaniques extérieures à (S) est donc égale à :

$$\vec{R}(\vec{S} \rightarrow S) = \vec{T} + \vec{F}.$$

Appliquons le théorème de la résultante dynamique à (S) dans son mouvement par rapport à R (repère non galiléen). (S) étant fixe dans R, l'équation vectorielle correspondant à ce théorème s'écrit, d'après la relation (12) :

$$\vec{0} = \vec{R}(\vec{S} \rightarrow S) - m\vec{\Gamma}(G \in R/R_g)$$

le point G décrivant d'un mouvement uniforme ($\theta = \omega t$), dans R_g , un cercle d'axe (O, \vec{z}_g) de rayon $r \cos \alpha$, le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(G \in R/R_g)$ a pour expression :

$$\vec{\Gamma}(G \in R/R_g) = -r\omega^2 \cos \alpha \vec{x}$$

Par suite : $\vec{R}(\vec{S} \rightarrow S) + mr\omega^2 \cos \alpha \vec{x} = \vec{0}$ sachant que

$$\vec{R}(\vec{S} \rightarrow S) = \vec{T} + \vec{F} \quad \text{et} \quad \vec{F} = -K \frac{mM}{r^2} \vec{i}$$

On en déduit que :

$$\vec{T} = K \frac{mM}{r^2} \vec{i} - mr\omega^2 \cos \alpha \vec{x} \quad (13)$$

soit \vec{P} le poids de (S). Lorsqu'on considère le repère galiléen, le pendule est en équilibre sous l'action mécanique du fil et de la pesanteur, et l'on a :

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}.$$

De plus, le vecteur accélération de la pesanteur est que :

$$\vec{P} = m\vec{g}.$$

Par conséquent, compte tenu de la relation (13), le vecteur \vec{g} a pour expression :

$$\vec{g} = -K \frac{M}{r^2} \vec{i} + r\omega^2 \cos \alpha \vec{x}.$$

Par conséquent, dans la définition du vecteur accélération de la pesanteur interviennent les effets d'inclinaison dus à la rotation de la terre. C'est pour ce vecteur n'est pas exactement dirigé vers le centre de la terre (sauf aux pôles et à l'équateur).

Sachant que $r = 6370 \text{ km}$ et $\omega = 1 \text{ tr}/j$, le terme $r\omega^2 \cos \alpha$ est au maximum égal à $r\omega^2 = 0,0336 \text{ m/s}^2$, à l'équateur, la norme du vecteur accélération de la pesanteur, est de l'ordre de $9,8 \text{ m/s}^2$, ce terme reste inférieur à 0,35 de la valeur de g .

REMARQUE

Le torseur d'action mécanique de la pesanteur inclut les effets d'inertie d'entraînement dus à la rotation de la terre. Par conséquent, un repère lié à la terre pourra être considéré comme galiléen, si le torseur des effets d'inertie de Coriolis dus à la rotation de la terre, négligeable par rapport au torseur d'action mécanique de la pesanteur.

Ce torseur doit être pris en considération pour expliquer par exemple :

- la déviation vers l'ouest des fusées ou projectiles lancés du sol,
- la déviation des courants aériens dans chaque hémisphère,
- la dérive d'instruments de bord sur les avions
- la rotation du plan d'oscillation du pendule Foucault (0,7 tour par jour, dans le sens aiguilles d'une montre, pour une latitude nord 45°).

*6. ÉQUILIBRAGE DYNAMIQUE

Un des problèmes essentiels en fabrication l'équilibrage des solides tournant autour d'un axe fixe. Cela, afin d'éviter la naissance de vibrations mécaniques pouvant engendrer une détérioration rapide des paliers (phénomène de fatigue), ou simplement créer une gêne à l'utilisation du matériel, dont le bruit.

6.1. SCHEMATISATION ADOPTÉE

Soit un bâti (S_0) auquel est lié le repère galiléen $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Un solide (S) de masse m et centre d'inertie G, a une liaison pivot sans frottement d'axe (O, \vec{z}_0) avec (S_0) .

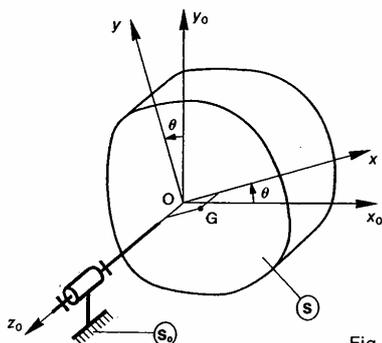


Fig. 10

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)$ un repère lié à (S) choisi, pour simplifier les calculs, de telle façon que le plan (O, \vec{z}_0, \vec{x}) contienne le point G. On pose

$$(\vec{x}_0, \vec{x}) = \theta \text{ et } \vec{OG} = a\vec{x} + c\vec{z}_0.$$

Le solide (S) étant quelconque, la matrice d'inertie de (S) au point O, dans la base de R, est de la forme :

$$[I_0(S)] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)}$$

L'action mécanique (inconnue) exercée par (S_0) sur (S) est représentée, au point O, par le torseur :

$$\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_0 \end{Bmatrix}_O$$

posons :
$$\begin{cases} \vec{R} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z}_0 \\ \vec{M}_0 = L\vec{x} + M\vec{y} \end{cases}$$

Sur (S) s'exerce également l'action mécanique, supposée connue, d'un ensemble matériel (E), représentée au point O, par le torseur :

$$\{\mathcal{T}(E \rightarrow S)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_{10} \end{Bmatrix}_O$$

posons :
$$\begin{cases} \vec{R}_1 = X_1\vec{x} + Y_1\vec{y} + Z_1\vec{z}_0 \\ \vec{M}_{10} = L_1\vec{x} + M_1\vec{y} + N_1\vec{z}_0 \end{cases}$$

Lorsque (S) est la roue d'un véhicule (avec son axe), (E) est constitué, par exemple, par la route, la pesanteur, l'arbre de transmission...

6.2. ACTION MÉCANIQUE DE (S_0) SUR (S)

Le torseur d'action mécanique de (S_0) sur (S) s'obtient en appliquant le principe fondamental de la dynamique à (S) dans son mouvement par rapport à R_0 .

$$\{\mathcal{D}(S/R_0)\} = \{\mathcal{T}(\bar{S} \rightarrow S)\}.$$

Sachant que (\bar{S}) est constitué par (S_0) et (E), cette égalité s'écrit :

$$\{\mathcal{D}(S/R_0)\} = \{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S)\} + \{\mathcal{T}(E \rightarrow S)\}.$$

Exprimons ces torseurs au point O :

$$\begin{Bmatrix} m\vec{\Gamma}(G/R_0) \\ \vec{\delta}_0(S/R_0) \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_0 \end{Bmatrix}_O + \begin{Bmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_{10} \end{Bmatrix}_O.$$

D'où les deux équations vectorielles :

$$m\vec{\Gamma}(G/R_0) = \vec{R} + \vec{R}_1 \quad (14)$$

$$\vec{\delta}_0(S/R_0) = \vec{M}_0 + \vec{M}_{10}. \quad (15)$$

Afin d'expliciter ces deux équations, calculons au préalable le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(G/R_0)$ et le moment dynamique $\vec{\delta}_0(S/R_0)$.

$$\vec{\Gamma}(G/R_0) = \left[\frac{d}{dt} \vec{V}(G/R_0) \right]_{R_0}$$

or

$$\vec{V}(G/R_0) = a\theta' \vec{y}$$

alors

$$\vec{\Gamma}(G/R_0) = a\theta'' \vec{y} - a\theta'^2 \vec{x}.$$

Le point O étant fixe dans R_0 , le moment dynamique $\vec{\delta}_0(S/R_0)$ se calcule à partir du moment cinétique $\vec{\sigma}_0(S/R_0)$ par la relation :

$$\vec{\delta}_0(S/R_0) = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_0(S/R_0) \right]_{R_0} \quad (16)$$

Le moment cinétique $\vec{\sigma}_0(S/R_0)$ s'exprime en fonction de l'opérateur d'inertie par la relation :

$$\vec{\sigma}_0(S/R_0) = \vec{J}_0(S, \vec{\Omega}(S/R_0))$$

ce qui correspond à la multiplication matricielle suivante, sachant que $\vec{\Omega}(S/R_0) = \theta' \vec{z}_0$:

$$[\vec{\sigma}_0(S/R_0)] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta' \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)}$$

d'où

$$\vec{\sigma}_0(S/R_0) = -E\theta' \vec{x} - D\theta' \vec{y} + C\theta' \vec{z}_0. \quad (17)$$

Pour calculer le moment dynamique $\vec{\delta}_0(S/R_0)$, à partir de la relation (16), utilisons la base de dérivation du repère R.

$$\vec{\delta}_0(S/R_0) = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_0(S/R_0) \right]_R + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{\sigma}_0(S/R_0)$$

d'où, avec l'expression de $\vec{\sigma}_0(S/R_0)$ de la relation (17),

$$\vec{\delta}_0(S/R_0) = -E\theta'' \vec{x} - D\theta'' \vec{y} + C\theta'' \vec{z}_0 + \theta' \vec{z}_0 \wedge (-E\theta' \vec{x} - D\theta' \vec{y} + C\theta' \vec{z}_0)$$

soit

$$\vec{\delta}_0(S/R_0) = (-E\theta'' + D\theta'^2) \vec{x} - (D\theta'' + E\theta'^2) \vec{y} + C\theta'' \vec{z}_0.$$

En rassemblant les résultats, les équations vectorielles (14) et (15), déduites du principe fondamental de la dynamique, s'écrivent en projection sur la base de R :

(14) en projection sur :

$$\vec{x} : -m a \theta'^2 = X + X_1$$

$$\vec{y} : m a \theta'' = Y + Y_1$$

$$\vec{z} : 0 = Z + Z_1$$

(15) en projection sur :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &: -E\theta'' + D\theta'^2 = L + L_1 \\ \ddot{y} &: -D\theta'' - E\theta'^2 = M + M_1 \\ \ddot{z} &: C\theta'' = N_1. \end{aligned}$$

Équations à partir desquelles on peut exprimer facilement X, Y, Z, L, M.

6.3. CONDITIONS D'ÉQUILIBRAGE DYNAMIQUE

Pour éviter les vibrations il faut rendre l'action mécanique dans la liaison entre (S) et (S₀) aussi constante que possible. En particulier, indépendante du mouvement de (S) par rapport à (S₀), c'est-à-dire de θ' et θ'' .

D'après les équations précédentes les conditions d'équilibrage dynamique sont donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} a=0 : \text{le centre d'inertie } G \text{ est sur l'axe de rotation } (O, \vec{z}_0) \text{ (condition d'équilibrage statique).} \\ D=0 \text{ et } E=0 : \\ \text{l'axe de rotation } (O, \vec{z}_0) \text{ est principal d'inertie pour (S).} \end{array} \right.$$

REMARQUES

— Dans un équilibrage statique ($a=0$), seule la résultante générale de l'action mécanique de (S₀) sur (S) est indépendante du mouvement de (S) par rapport à (S₀).

— D'une façon imagée nous pouvons résumer les conditions d'équilibrage par les figures suivantes (figure 11) :

6.4. RÉALISATION PRATIQUE DE L'ÉQUILIBRAGE DYNAMIQUE

On remplace (S) par un solide (S') constitué de (S) et de deux solides (S₁) et (S₂), assimilables à des points matériels, tel que (S') soit dynamiquement équilibré.

Soit m_i la masse du solide (S_i) ($i=1$ et 2) placé au point M_i de coordonnées cartésiennes x_i, y_i, z_i dans le repère R.

Notons G' le centre d'inertie de (S'), D' et E' les produits d'inertie de (S') par rapport aux axes du repère R.

(S') est dynamiquement équilibré si G' est sur l'axe (O, \vec{z}_0) et si D'=0 et E'=0.

Traduisons ces conditions :

La position du centre d'inertie G' est donnée par relation (statique, chapitre 1, paragraphe 2.1) :

$$\overrightarrow{OG'} = \frac{m\overrightarrow{OG} + m_1\overrightarrow{OM}_1 + m_2\overrightarrow{OM}_2}{m + m_1 + m_2}$$

si G' est sur l'axe (O, \vec{z}_0) cette équation vectorielle s'écrit en projection sur :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &: ma + m_1x_1 + m_2x_2 = 0 \\ \ddot{y} &: m_1y_1 + m_2y_2 = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Les deux produits d'inertie D' et E' ont pour valeurs :

$$\begin{aligned} D' &= D + m_1y_1z_1 + m_2y_2z_2 \\ E' &= E + m_1x_1z_1 + m_2x_2z_2 \end{aligned}$$

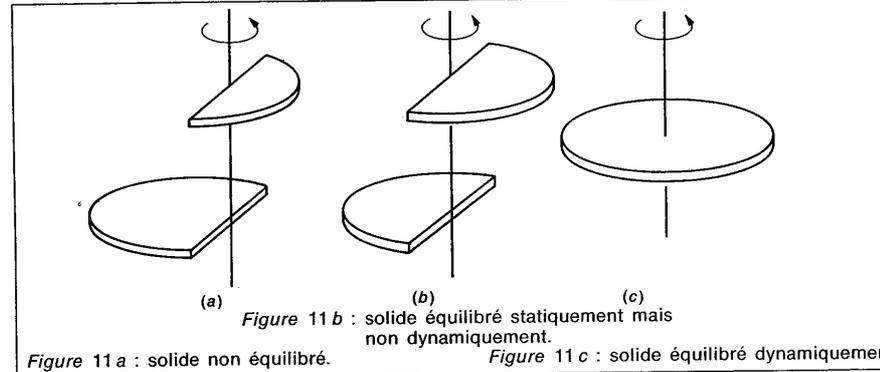
si D' et E' sont nuls on obtient les deux relations supplémentaires suivantes :

$$\begin{aligned} D + m_1y_1z_1 + m_2y_2z_2 &= 0 \\ E + m_1x_1z_1 + m_2x_2z_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

REMARQUE

Si D est différent de zéro (cas général) l'équilibrage dynamique ne peut se faire avec une seule masse. En effet, si par exemple $m_2=0$ l'équation (19) indique que $y_1=0$, et l'équation (20) montre alors que D doit être nul, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de départ.

On dispose de quatre équations ((18) à (21)) pour déterminer les huit inconnues x_i, y_i, z_i et m_i ($i=1$ et 2). Le problème admet une infinité de solutions. Il faut donc se fixer quatre conditions. Examinons ces conditions dans le cas de l'équilibrage dynamique d'une roue de véhicule. Dans ce type d'équilibrage les masses sont fixées sur le bord de la jante, de chaque côté de la roue.



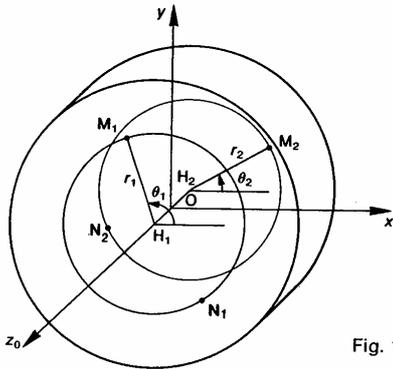


Fig. 12

Notons H_i la projection orthogonale du point M_i sur l'axe (O, z_0) , et posons :

$$\begin{cases} \theta_i = (\vec{x}, \overline{H_i M_i}) \\ r_i = \|\overline{H_i M_i}\|. \end{cases}$$

Remplaçons les coordonnées cartésiennes x_i, y_i, z_i du point M_i par les coordonnées cylindriques r_i, θ_i, z_i . Les quatre conditions imposées sont les valeurs des paramètres z_1, z_2, r_1, r_2 (généralement $r_1 = r_2$) et les quatre inconnues sont $m_1, m_2, \theta_1, \theta_2$. Inconnues que l'on détermine avec les quatre équations précédentes.

En éliminant $m_2 x_2$ entre les équations (18) et (21) on obtient la relation :

$$m_1 x_1 (z_2 - z_1) = E - m a z_2. \quad (22)$$

En éliminant $m_2 y_2$ entre les équations (19) et (20) on obtient la relation :

$$m_1 y_1 (z_2 - z_1) = D. \quad (23)$$

REMARQUE

Lorsque D n'est pas nul, la relation (23) montre que z_2 doit être différent de z_1 . En effet, dans ce

cas m_1 est différent de zéro, et y_1 n'est généralement pas nul. Ce qui veut dire que les deux masses doivent être situées dans deux plans de section droite de la roue, distincts.

En remplaçant x_1 par $r_1 \cos \theta_1$ dans la relation (22) et y_1 par $r_1 \sin \theta_1$ dans la relation (23), on a à résoudre le système en m_1 et θ_1 suivant :

$$\begin{cases} m_1 r_1 \cos \theta_1 (z_2 - z_1) = E - m a z_2 \\ m_1 r_1 \sin \theta_1 (z_2 - z_1) = D. \end{cases}$$

En éliminant les membres de gauche de ces deux équations on obtient la relation :

$$(E - m a z_2) \sin \theta_1 = D \cos \theta_1,$$

si $D \neq 0$:

$$\cotg \theta_1 = \frac{E - m a z_2}{D}$$

d'où θ_1 , modulo π . La valeur exacte de θ_1 est fixée avec l'une des deux équations.

Connaissant θ_1 on trouve immédiatement m_1 . Puis les deux équations (18) et (19) permettent le calcul de m_2 et θ_2 .

REMARQUES

— Au lieu d'ajouter des masses aux points M_1 et M_2 on peut enlever les mêmes masses aux points N_1 et N_2 symétriques des points M_1 et M_2 par rapport à l'axe de rotation (O, z_0) . Cette méthode est couramment utilisée dans l'industrie pour équilibrer des rotors de moteur, des turbines, des vilebrequins, etc.

— Dans cette étude nous avons calculé les masses à mettre sur la jante de la roue connaissant D et E , or dans la réalité ces deux produits d'inertie sont inconnus. D'où l'utilisation d'équilibreuse qui déterminent les caractéristiques de la résonance engendrée par le mouvement de la roue, montée sur un palier approprié.

A SAVOIR

1. Le principe fondamental de la dynamique s'applique relativement à tout repère R , appelé repère galiléen et au moins une chronologie, appelée chronologie galiléenne, tels que pour tout sous-ensemble matériel (e) d'un ensemble matériel (E) , le torseur dynamique de (e) dans son mouvement par rapport à R , soit égal au torseur des actions mécaniques extérieures à (e) .

$$\{D(e/R)\} = \{e(e \rightarrow e)\} + \{v(e) \in (E)\}$$

2. Une équation de mouvement est une équation différentielle du second ordre traduisant les théorèmes généraux dans laquelle ne figure aucune composante inconnue d'action mécanique.

3. Le théorème des actions mutuelles

$$\{v(e_1 \rightarrow e_2)\} = -\{v(e_2 \rightarrow e_1)\}$$

4. Le principe fondamental de la dynamique s'applique relativement à tout repère R condition d'ajouter au torseur des actions mécaniques extérieures le torseur des effets d'inertie d'entraînement et le torseur des effets d'inertie de Coriolis.

5. Tout repère en translation rectiligne uniforme par rapport à un repère galiléen est aussi galiléen.

6. Les conditions d'équilibrage dynamique d'un solide (S) en rotation autour d'un axe par rapport à un bâti

— le centre d'inertie G de (S) est sur l'axe de rotation;

— l'axe de rotation est principal d'inertie pour (S) .

PROBLÈME RÉSOLU

Le but du problème est de comparer les accélérations maximales qui peuvent être obtenues sur les trois types de véhicules suivants :

- traction avant (TA),
- propulsion arrière (PA),
- quatre roues motrices (4RM).

L'étude est modélisée par le problème plan suivant :

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère galiléen lié à la route axe (O, \vec{x}) . On désigne par $\vec{g} = -g\vec{y}$ l'accélération de la pesanteur.

Le schéma de la figure 13 définit certaines dimensions nécessaires à l'étude.

Le véhicule (S) de centre d'inertie G et de masse M est animé par rapport à R d'un mouvement de translation rectiligne, d'accélération $\gamma\vec{x}$ ($\gamma > 0$).

Les liaisons entre les roues et le châssis du véhicule sont supposées sans frottement.

Les actions mécaniques de la route sur les roues sont définies par les torseurs suivants :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{C}(\text{route} \rightarrow S_1)\} &= \begin{Bmatrix} T_1\vec{x} + N_1\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{I_1} \\ \{\mathcal{C}(\text{route} \rightarrow S_2)\} &= \begin{Bmatrix} T_2\vec{x} + N_2\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{I_2} \end{aligned}$$

Soit f le coefficient de frottement entre les roues et la route.

Considérons les deux coefficients : $\mu_1 = \frac{T_1}{N_1}$ et

$$\mu_2 = \frac{T_2}{N_2}.$$

On néglige dans cette étude l'action de l'air sur le véhicule et la masse des roues.

On donne : $g = 10 \text{ m/s}^2$; $L_1 = 1 \text{ m}$; $L_2 = 1,3 \text{ m}$; $h = 0,5 \text{ m}$; $M = 1200 \text{ kg}$.

QUESTION 1

En supposant qu'il y a équidhérence des roues pour le véhicule à quatre roues motrices, c'est-à-dire $\mu_1 = \mu_2$:

a) déterminer pour chaque type de véhicule les expressions de μ_1 et μ_2 en fonction de γ ;

b) tracer les graphes correspondants;

c) interpréter les résultats.

RÉPONSE

a) Véhicule à traction avant :

Appliquons le principe fondamental de la dynamique au véhicule (S) (dont les roues font partie), dans son mouvement par rapport au repère R :

$$\{\mathcal{D}(S/R)\} = \{\mathcal{C}(\vec{S} \rightarrow S)\}. \quad (24)$$

$\{\vec{S}\}$, l'extérieur de (S), est constitué par la pesanteur et la route, au niveau des roues (S_1 et S_2).

La relation (24) s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{D}(S/R)\} &= \{\mathcal{C}(g \rightarrow S)\} \\ &+ \{\mathcal{C}(\text{route} \rightarrow S_1)\} \\ &+ \{\mathcal{C}(\text{route} \rightarrow S_2)\}. \quad (25) \end{aligned}$$

Exprimons ces différents torseurs :

$$\{\mathcal{D}(S/R)\}_G = \begin{Bmatrix} M\vec{\Gamma}(G/R) \\ \vec{\delta}_G(S/R) \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} M\gamma\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$$

le moment dynamique $\vec{\delta}_G(S/R)$ est nul, car

$$\vec{\delta}_G(S/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_G(S/R) \right]_R$$

avec $\vec{\sigma}_G(S/R) = \vec{0}$, le véhicule ayant un mouvement de translation et la masse des roues étant négligée.

$$\{\mathcal{C}(g \rightarrow S)\}_G = \begin{Bmatrix} -Mg\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$$

$$\{\mathcal{C}(\text{route} \rightarrow S_1)\}_G = \begin{Bmatrix} T_1\vec{x} + N_1\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{I_1}$$

$$\{\mathcal{C}(\text{route} \rightarrow S_2)\}_G = \begin{Bmatrix} N_2\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{I_2}$$

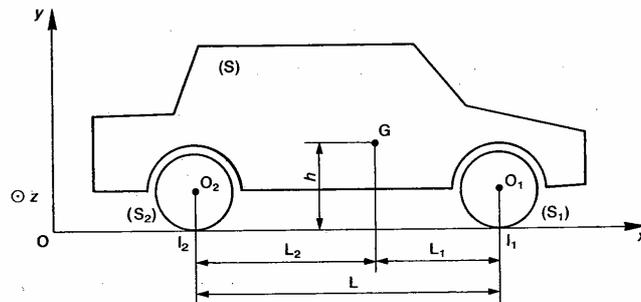


Fig. 13

T_2 est nul. Pour le vérifier il suffit d'appliquer le principe fondamental de la dynamique à la roue (S_2).

Par suite, l'égalité (25) devient :

$$c \begin{Bmatrix} M\gamma\ddot{x} \\ 0 \end{Bmatrix} = c \begin{Bmatrix} -Mg\ddot{y} \\ 0 \end{Bmatrix} + I_1 \begin{Bmatrix} T_1\ddot{x} + N_1\ddot{y} \\ 0 \end{Bmatrix} + I_2 \begin{Bmatrix} N_2\ddot{y} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

d'où la première équation vectorielle (théorème de la résultante dynamique) :

$$M\gamma\ddot{x} = -Mg\ddot{y} + T_1\ddot{x} + N_1\ddot{y} + N_2\ddot{y}$$

soit en projection

— sur \ddot{x} : $M\gamma = T_1$ (26)

— sur \ddot{y} : $0 = -Mg + N_1 + N_2$

et la deuxième équation vectorielle (théorème du moment dynamique au point I_2) :

$$\vec{I}_2 \vec{G} \wedge M\gamma\ddot{x} = \vec{I}_2 \vec{G} \wedge (-Mg\ddot{y}) + \vec{I}_2 \vec{I}_1 \wedge (T_1\ddot{x} + N_1\ddot{y})$$

ce qui donne en projection sur \ddot{z} , avec les dimensions inscrites sur le dessin :

$$-M\gamma h = -Mg L_2 + N_1 L_1 \quad (27)$$

Par conséquent, l'expression $\mu_1 = \frac{T_1}{N_1}$ s'écrit, avec la valeur de T_1 donnée par la relation (26), et la valeur de N_1 obtenue à partir de la relation (27) :

$$\mu_1 = \frac{\gamma L_1}{g L_2 - \gamma h}$$

T_2 étant nulle : $\mu_2 = 0$.

Par un raisonnement analogue :

— pour un véhicule à propulsion arrière :

$$\mu_1 = 0 \quad \text{et} \quad \mu_2 = \frac{\gamma L_1}{g L_1 + \gamma h}$$

— pour un véhicule à quatre roues motrices :

$$\mu_1 = \mu_2 = \frac{\gamma}{g}$$

b) Les graphes correspondants sont tracés figure 14 (sauf les courbes en pointillés).

Les pentes à l'origine sont :

$$\begin{cases} \mu'_1(\text{TA}) = \frac{L_1}{g L_2} = 0,176 \\ \mu'_2(\text{PA}) = \frac{L_1}{g L_1} = 0,23 \\ \mu'(4\text{RM}) = \frac{1}{g} = 0,1 \end{cases}$$

Remarquons que $\mu_1(\text{TA}) = \mu_2(\text{PA}) = 0,6$ pour $\gamma = 3 \text{ m/s}^2$.

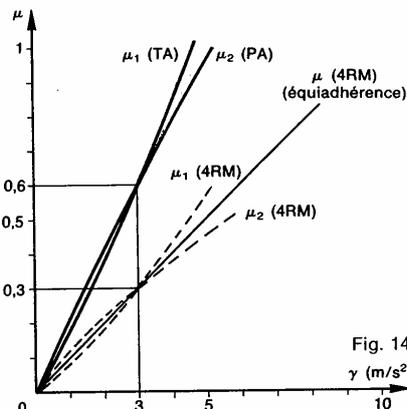


Fig. 14
 $\gamma \text{ (m/s}^2\text{)}$

c) Meilleure motricité du véhicule à quatre roues motrices dans tous les cas.

Si $f < 0,6$: meilleure motricité TA/PA.

Si $f > 0,6$: meilleure motricité PA/TA.

QUESTION 2

L'hypothèse d'équiadhérence des roues n'est pas conforme à la réalité pour le véhicule de série à quatre roues motrices. Pour ce type de véhicule la puissance transmise par le moteur aux roues avant et arrière est sensiblement identique ($T_1 = T_2$).

En considérant cette nouvelle hypothèse :

a) déterminer pour le véhicule à quatre roues motrices les expressions de μ_1 et μ_2 en fonction de γ ;

b) tracer les graphes correspondants;

c) interpréter les résultats.

RÉPONSE

a) En appliquant le principe fondamental de la dynamique au véhicule (S) dans son mouvement par rapport au repère R, on aboutit de la même façon que précédemment, au système de trois équations suivantes :

$$\begin{cases} M\gamma = T_1 + T_2 \\ 0 = -Mg + N_1 + N_2 \\ -M\gamma h = -Mg L_2 + N_1 L_1 \end{cases} \quad (28)$$

Sachant que $T_1 = T_2$, on en déduit que :

$$\mu_1 = \frac{\gamma L_1}{2(g L_2 - \gamma h)}$$

et

$$\mu_2 = \frac{\gamma L_1}{2(g L_1 + \gamma h)}$$

b) Les graphes correspondants sont tracés figure 14 : courbes en pointillés.

Remarquons que :

$$\mu_{1(ARM)} = \mu_{2(ARM)} = 0,3 \text{ pour } \gamma = 3 \text{ m/s}^2.$$

c) Accélération limitée par μ_2 si $f < 0,3$.

Accélération limitée par μ_1 si $f > 0,3$.

QUESTION 3

Pour les véhicules à quatre roues motrices utilisés dans les rallyes on cherche le plus possible à obtenir une équiadhérence des roues en répartissant convenablement la puissance du moteur entre les roues avant et arrière.

Dans l'hypothèse d'équiadhérence des roues :

a) déterminer en fonction de γ , le rapport de puissance $\frac{T_1}{T_2}$ qu'il devrait y avoir entre les roues avant et arrière;

b) tracer le graphe correspondant.

RÉPONSE

a) Les valeurs des composantes normales N_1 et N_2 , obtenues à partir des relations (28) et (29) de la question 2, sont les suivantes :

$$N_1 = \frac{M}{L} (gL_2 - \gamma h)$$

$$N_2 = \frac{M}{L} (gL_1 + \gamma h)$$

s'il y a équiadhérence des roues : $\mu_1 = \mu_2$ comm

$$\mu_1 = \frac{T_1}{N_1} \text{ et } \mu_2 = \frac{T_2}{N_2}, \text{ on en déduit que :}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{gL_2 - \gamma h}{gL_1 + \gamma h}$$

b) Le graphe de $\frac{T_1}{T_2}$ en fonction de γ est tracé figure 15.

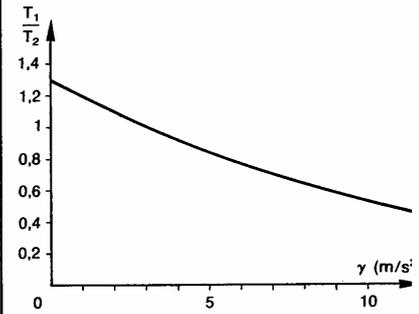


Fig. 15

CONSEILS POUR LA RESOLUTION

1. Pour obtenir une équation de mouvement, il faut analyser les forces d'action mécanique du mécanisme, pour choisir :
 - les sous-ensembles de pièces, auxquels on appliquera le principe fondamental;
 - le point ou l'on écrira le théorème du moment dynamique.
2. Laxe sur lequel on projetera les équations vectorielles traduisant les théorèmes généraux.
3. Rechercher les intégrales premières du mouvement pour obtenir des équations simples.
4. Il est déconseillé, sauf cas exceptionnels, d'utiliser le principe fondamental de la dynamique dans un repère non galiléen.

EXERCICES AVEC RÉPONSES

1 — Pour déterminer le moment d'inertie I du rotor (S) d'un gyroscope, autour de son axe de révolution matérielle, on réalise la manipulation suivante, basée sur la mesure de la période d'oscillation d'un pendule de torsion.

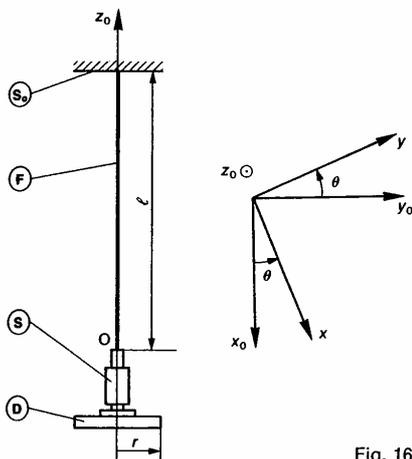


Fig. 16

Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère galiléen lié à un bâti (S_0), l'axe (O, \vec{z}_0) étant dirigé suivant la verticale ascendante.

Un fil de torsion (F) de longueur l , de section droite circulaire de diamètre d , disposé suivant l'axe (O, \vec{z}_0), est fixé à l'une de ses extrémités au bâti (S_0).

Le rotor (S) est lié à (F) de telle façon que son axe de révolution matérielle coïncide avec l'axe de (F).

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à (S). On pose $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x})$, l'angle θ est nul lorsque le système est au repos.

Le moment de torsion exercé par (F) sur (S) est $\vec{M}_0 = M\vec{z}_0$, avec $M = -K\theta$ et $K = \text{Cte}$ (raideur du fil en torsion).

QUESTIONS

1° Déterminer l'équation de mouvement de (S) par rapport à R_0 .

2° Déterminer $\theta(t)$, sachant qu'à la date $t=0$: $\theta(0) = \theta_0$ et $\theta'(0) = 0$.

3° Déterminer la période T du mouvement.

4° Un disque (D) homogène, de masse m , de rayon r , est fixé à l'extrémité de (S) de telle façon que son axe coïncide avec celui de (S). Déterminer alors la période T_1 du mouvement.

5° En déduire l'expression de I en fonction de T, T_1, m et r .

Application numérique : $T = 2,33$ s ; $T_1 = 2,96$ s ; $m = 600$ g ; $r = 5$ cm.

6° θ_0 ne doit pas être trop grand, pour que le fil reste dans le domaine élastique. Afin de connaître $\theta_{0\text{max}}$, déterminer :

a) Le module de Coulomb du fil. On rappelle (cours de première) que : $K = \frac{GI_0}{l}$, avec

$G = \text{module de Coulomb du fil}$; $I_0 = \frac{\pi d^4}{32}$ et $l = \text{longueur du fil}$.

Application numérique : $l = 90$ cm et $d = 1$ mm.

b) En déduire la valeur de $\theta_{0\text{max}}$, sachant que la contrainte tangentielle maximale dans la section droite du fil est : $\tau_{\text{max}} = 100$ MPa.

On rappelle que $\tau_{\text{max}} = \frac{M \cdot d}{2I_0}$.

RÉPONSES

1° $\theta'' + \omega^2\theta = 0$, avec $\omega^2 = \frac{K}{I}$.

2° L'équation différentielle du second ordre précédente a pour équation caractéristique : $r^2 + \omega^2 = 0$, dont les deux solutions imaginaires conjuguées sont : $r_1 = i\omega$ et $r_2 = -i\omega$.

Dans ce cas, la solution générale est de la forme : $\theta = A \cos \omega t + B \sin \omega t$.

Avec les conditions initiales proposées : $A = \theta_0$ et $B = 0$.

Alors : $\theta = \theta_0 \cos \omega t$.

3° $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

4° $T_1 = 2\pi \sqrt{I + \frac{mr^2}{2}}$.

5° $I = \frac{mr^2}{2} \left(\frac{T_1}{T} \right)^2 - I$.

Application numérique : $I = 1,22 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

6° a) $G = 81\,400$ MPa.

b) $\theta_{0\text{max}} = 2,2$ rad.

2 — La figure 17 représente une broche multiplicatrice adaptable sur fraiseuse, machine à pointer, perceuse ou aléuseuse dont la vitesse de rotation est généralement insuffisante pour donner la vitesse de coupe rationnelle aux fraises couteaux de petit diamètre.

Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère galiléen lié au corps ① de la broche. Les arbres ① et ② ont une liaison pivot sans frottement d'axe (O, \vec{y}_0) avec le corps ②.

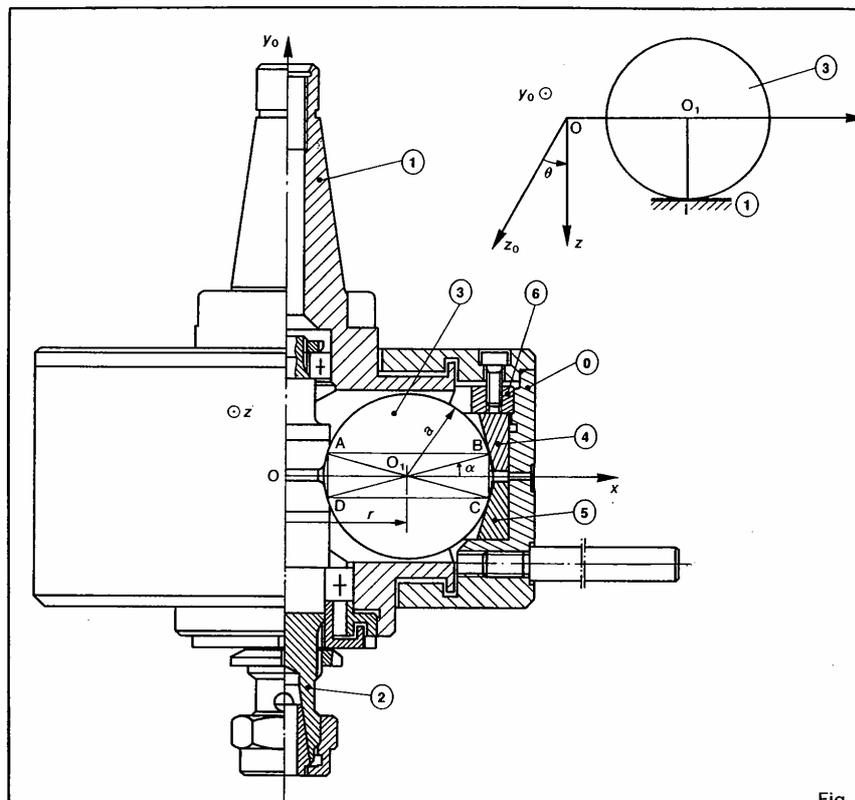


Fig. 1

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}_0, \vec{z})$ un repère lié à l'arbre moteur (1). On pose : $\theta = (\vec{z}_0, \vec{z})$, avec $\theta' = \text{constante} = \omega_e$ ($\omega_e > 0$).

L'arbre (1) entraîne en rotation trois sphères telles que (3), homogènes, de masse m , de rayon a , disposées à 120° les unes des autres.

Le centre O_1 de la sphère (3) décrit un cercle de centre O et de rayon r , tel que $\overline{OO_1} = r\vec{x}$.

La sphère (3) roule sans glisser aux points B et C sur deux bagues coniques (4) et (5) liées au corps (6), et communique son mouvement à l'arbre récepteur (2) en roulant sans glisser aux points A et D sur celui-ci. On pose : $\overline{\Omega}(2/R_0) = \omega_s \vec{y}_0$. Les points A, B, C, D sont les quatre sommets d'un rectangle, comme indiqué sur la figure. Notons : $(\vec{x}, \overline{DB}) = (\overline{AC}, \vec{x}) = \alpha$.

(1) est en contact avec (3) au point I tel que $\overline{OI} = a\vec{z}$. Soit f le coefficient de frottement aux points A, B, C, D et I entre les différentes pièces en contact. On définit

l'action mécanique de l'arbre (2) sur la sphère (3), à niveau du point A, par le torseur :

$$\{\overline{\mathcal{T}}(2 \xrightarrow{A} 3)\} = \begin{Bmatrix} N_A \vec{n} + T_A \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$

\vec{n} : vecteur unitaire dirigé du point A vers centre O_1 de la sphère (3) (alors $N_A \geq 0$).

Les autres torseurs d'action mécanique sur (3), au points B, C, D et I, sont définis d'une façon analogue. L'action mécanique de la pesanteur étant négligée, on suppose que les composantes normales en B et C sont égales, ainsi que les composantes tangentielles ($N_B = N_C$ et $T_B = T_C$).

Le but de l'étude est de savoir comment régler la bague (6) pour qu'elle engendre une action mécanique suffisante entre les sphères, l'arbre (2) et les bagues coniques (4) et (5), de façon à transmettre la puissance motrice, sans toutefois dépasser les pressions de contact maximal que peuvent supporter les matériaux.

On donne :

$$\omega_e = 157,08 \text{ rad/s (1 500 tr/min)}.$$

Puissance fournie à l'arbre moteur (1) : $P = 750 \text{ W}$ (voir cours de terminale).

$$r = 48 \text{ mm}; \quad a = 32,5 \text{ mm}; \quad \alpha = 14^\circ; \quad f = 0,12; \quad m = 1,121 \text{ kg}.$$

QUESTIONS

1° Déterminer au point O_1 le torseur cinématique du mouvement de la sphère (3) par rapport au repère R_0 .

2° Déterminer le rapport de multiplication de la broche : $\frac{\omega_s}{\omega_e}$.

3° Déterminer le vecteur vitesse de glissement au point I de la sphère (3) par rapport à l'arbre moteur (1) : $\vec{V}(I \in (3)/(1))$.

4° Déterminer au point O_1 le torseur dynamique de la sphère (3) dans son mouvement par rapport au repère R_0 .

5° Écrire les équations scalaires déduites du principe fondamental de la dynamique appliqué à la sphère (3) dans son mouvement par rapport au repère R_0 , en projection sur $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$. (Le théorème du moment dynamique sera écrit au point O_1 .)

6° Déterminer la composante normale N_1 de la résultante générale du torseur d'action mécanique de (1) sur (3).

7° Déterminer les composantes tangentielles T_A et T_B des résultantes générales des torseurs d'action mécanique de (2) sur (3) et (4) sur (3) respectivement.

8° Déterminer la valeur minimale de N_B pour qu'il y ait roulement sans glissement aux points A, B, C, D entre les solides en contact.

9° La puissance perdue par frottement au contact de la sphère (3) et de l'arbre moteur (1) est :

$$P_f = T_f \vec{x} \cdot \vec{V}(I \in (3)/(1)).$$

Déterminer alors le rendement η du mécanisme

$$\left(\eta = \frac{P - 3|P_f|}{P} \right).$$

RÉPONSES

$$1^\circ \{ \mathcal{U}((3)/R_0) \}_{O_1} = \begin{Bmatrix} -\frac{r}{a \cos \alpha} \omega_e \vec{y}_0 \\ -\omega_e r \vec{z} \end{Bmatrix}$$

$$2^\circ \frac{\omega_s}{\omega_e} = \frac{2r}{r - a \cos \alpha}, \quad \frac{\omega_s}{\omega_e} = 5,83.$$

$$3^\circ \vec{V}(I \in (3)/(1)) = -\frac{r + a \cos \alpha}{\cos \alpha} \omega_e \vec{x}, \text{ d'où } \|\vec{V}(I \in (3)/(1))\| = 12,87 \text{ m/s}.$$

$$4^\circ \{ \mathcal{D}((3)/R_0) \}_{O_1} = \begin{Bmatrix} -mr\omega_e^2 \vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

5° On montre que $N_A = N_D$ et $T_A = T_D$. Les autres équations s'écrivent alors :

$$\begin{cases} 2(N_A - N_B) \cos \alpha + T_1 = -mr\omega_e^2 \\ 2(T_A + T_B) - N_1 = 0 \\ 2(T_A - T_B) \cos \alpha + T_1 = 0. \end{cases}$$

$$6^\circ N_1 = \frac{P}{3(r + af)\omega_e}, \quad N_1 = 30,68 \text{ N}.$$

$$7^\circ T_A = 6,72 \text{ N}, \quad T_C = 8,62 \text{ N}.$$

$$8^\circ N_{B_{min}} = 740,95 \text{ N}.$$

$$9^\circ \eta = 0,81.$$

3 — L'aérogénérateur présenté figure 18 est utilisé pour répondre aux besoins en énergie électrique d'installations isolées : milieux désertiques, milieux maritimes. Son rôle est de transformer l'énergie éolienne en énergie électrique. Celle-ci sera soit utilisée directement, soit stockée dans des batteries d'accumulation. L'aérogénérateur est constitué :
 — d'une hélice bipale d'axe horizontal,
 — d'un dispositif d'orientation (safran et liaison pivot d'axe vertical),
 — d'un générateur électrique.

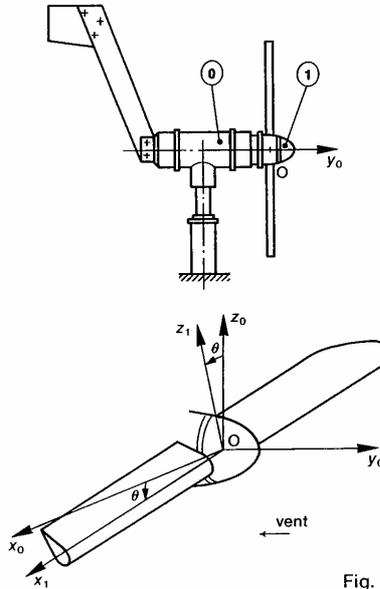


Fig. 18

Étudions l'aérogénérateur par vent stable. Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère galiléen lié au corps (0) de l'aérogénérateur, tel que l'axe (O, \vec{y}_0) soit confondu avec l'axe de l'hélice.

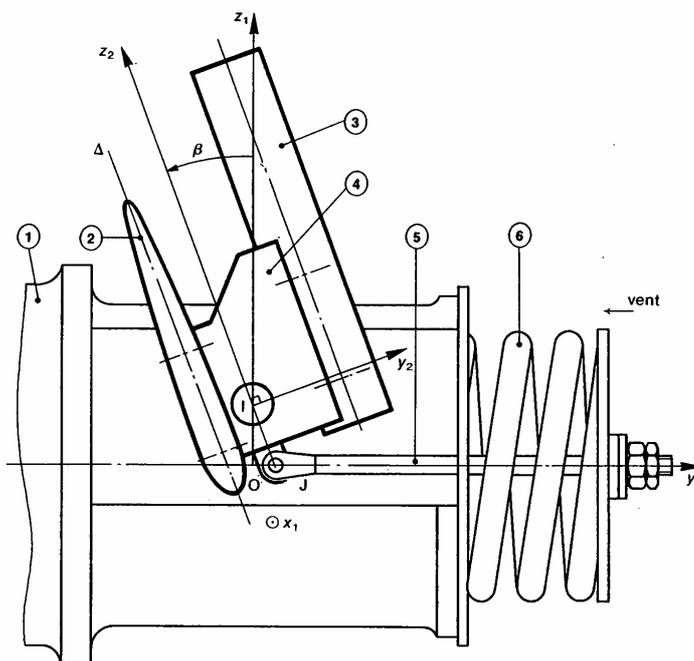


Fig. 19

Le vent souffle à la vitesse $\vec{V} = -V\vec{y}_0$ (V : constante positive).

L'arbre (1) de l'hélice a une liaison pivot d'axe (O, \vec{y}_0) avec (0). Soit $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_0, \vec{z}_1)$ un repère lié à (1) tel que l'axe (O, \vec{x}_1) soit parallèle à l'axe des pales. On pose $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ avec $\theta' = Cte = \omega$ ($\omega > 0$).

Le fonctionnement optimal de l'aérogénérateur est obtenu avec les conditions suivantes : $V = 7$ m/s et $\omega = 120$ rad/s. Un système de régulation modifiant l'angle de calage β permet de rester au voisinage de ce point de fonctionnement.

L'aérogénérateur comporte un système de régulation par pale. Pour la pale (2), celui-ci est constitué par un ensemble (3) de pièces cinématiquement équivalentes : (2) : pale, (3) : barre de régulation, (4) : support et par un ressort (5) pris entre l'arbre (1) et la tige de rappel (6).

Cet ensemble (3) a une liaison pivot sans frottement d'axe (I, \vec{x}_1) avec l'arbre (1), telle que $\vec{OI} = d\vec{z}_1$ ($d > 0$). Soit $R_2(I, \vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ un repère lié à (3), tel que l'axe (I, \vec{z}_2) soit parallèle à la droite de référence Δ de la pale.

On pose : $\beta = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$, $\beta = \text{constante} = 20^\circ$.

La tige (5) a une liaison linéique annulaire sans frottement d'axe (J, \vec{x}_1) avec (3), telle que $\vec{IJ} = -a\vec{z}_2$ ($a > 0$). Le point J est sur l'axe (O, \vec{y}_0) lorsque $\beta = 20^\circ$.

(5) a pour masse M et la position de son centre d'inertie G est définie par : $\vec{IG} = \lambda\vec{x}_1 + \mu\vec{z}_2$. La matrice d'inertie de (5) au point G , dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est la suivante :

$$[I_G(S)] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$$

L'action mécanique du vent sur la pale (2) est représentée par le torseur :

$$\{\mathcal{T}(\text{vent} \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_H$$

avec $\vec{R} = -R\vec{y}_2$, $R > 0$ (seule la composante de \vec{R} suivant \vec{y}_2 , entraîne la pale en rotation) et

$$\vec{H} = p\vec{x}_1 + q\vec{y}_2 + r\vec{z}_2.$$

L'action mécanique de (5) sur (3) est représentée par le force $(J, Y\vec{y}_0)$. Le but de l'étude est de déterminer Y . L'action mécanique de la pesanteur est négligée.

On donne :

$\omega = 120 \text{ rad/s}$; $\beta = 20^\circ$; $d = 14 \text{ mm}$; $\lambda = 159 \text{ mm}$;
 $\mu = 13 \text{ mm}$; $M = 850 \text{ g}$; $A = 700 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$;
 $B = 30650 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; $C = 30200 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$;
 $D = 180 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; $E = -1920 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$;
 $F = -1150 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; $R = 100 \text{ N}$; $\rho = 400 \text{ mm}$;
 $q = -8,5 \text{ mm}$; $r = -6 \text{ mm}$.

QUESTIONS

- 1° Déterminer le moment cinétique, au point G, de \textcircled{S} dans son mouvement par rapport à R_0 : $\vec{\sigma}_G(S/R_0)$.
- 2° Déterminer la projection sur \vec{x}_1 du moment dynamique, au point I, de \textcircled{S} dans son mouvement par rapport à R_0 : $\vec{x}_1 \cdot \vec{\delta}_I(S/R_0)$.
- 3° Écrire en projection sur \vec{x}_1 le théorème du moment dynamique, au point I, appliqué à \textcircled{S} dans son mouvement par rapport à R_0 .
- 4° En déduire l'action mécanique exercée par la tige \textcircled{S} sur l'ensemble \textcircled{S} .

RÉPONSES

- 1° $\vec{\sigma}_G(S/R_0) = \omega (-F \cos \beta + E \sin \beta) \vec{x}_1 + \omega (B \cos \beta + D \sin \beta) \vec{y}_2 - \omega (D \cos \beta + C \sin \beta) \vec{z}_2$.
- 2° Commencer le calcul de cette façon : $\vec{x}_1 \cdot \vec{\delta}_I(S/R_0) = \vec{x}_1 \cdot \vec{\delta}_G(S/R_0) + \vec{x}_1 \cdot (M \vec{\Gamma}(G/R_0) \wedge \vec{GI})$.
 Par suite : $\vec{x}_1 \cdot \vec{\delta}_I(S/R_0) = \omega^2 [(B - C + M\mu^2) \sin \beta \cos \beta + D(\sin^2 \beta - \cos^2 \beta) + M\mu d \sin \beta]$.
- 3° $\vec{x}_1 \cdot \vec{\delta}_I(S/R_0) = \vec{x}_1 \cdot \vec{M}_I(\vec{S} \rightarrow S)$ avec $\vec{x}_1 \cdot \vec{M}_I(\vec{S} \rightarrow S) = Yd + Rr$.
- 4° $Y = 151 \text{ N}$.

4 — Dans la pompe à vide à palettes « FLACO », dont un dessin partiel est donné figure 20, on se propose au cours du fonctionnement de savoir :
 — si les palettes restent bien appliquées sur l'alésage du corps (S_0) de la pompe,
 — s'il y a risque d'arc-boutement des palettes dans leur liaison avec le rotor (S_1) de la pompe.
 (L'étude est limitée au voisinage de la position où les palettes sortent au maximum de (S_1)).

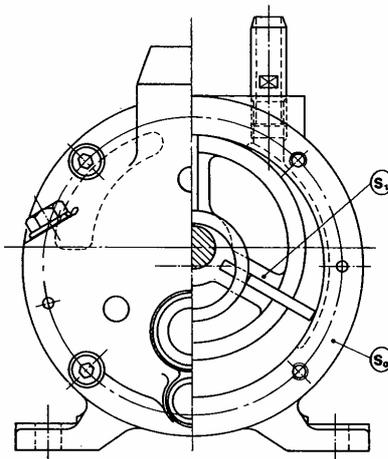


Fig. 20

Pour cela adoptons le modèle plan suivant :

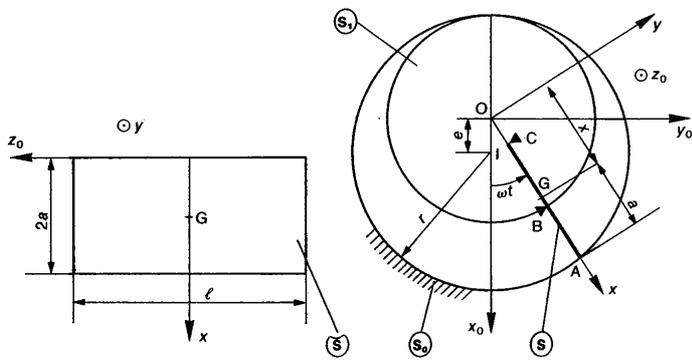


Fig. 21

Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère galiléen lié au corps (S_0) de la pompe.

L'alésage de rayon r , du corps de la pompe, est d'axe (I, \vec{z}_0) , tel que : $\vec{OI} = e\vec{x}_0$ ($e > 0$). Le rotor (S_1) a une liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_0) avec (S_0) . Son rayon extérieur est égal à $r - e$. Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)$ un repère lié à (S_1) . On pose $(\vec{x}_0, \vec{x}) = \theta$, avec $\theta' = Cte = \omega$ ($\omega > 0$); $\theta = \omega t$.

Considérons la palette (S) disposée suivant l'axe (O, \vec{x}) . (S) est assimilée à un rectangle de longueur l , de largeur $2a$, d'épaisseur négligeable. Soient m la masse et G le centre d'inertie de (S) . On pose $\vec{OG} = x\vec{x}$. La différence de pression entre les deux faces de la palette est Δp .

La palette (S) a une liaison glissière avec jeu et frottement (coefficient de frottement f) avec (S_1) , si bien qu'on peut remplacer cette liaison par deux liaisons ponctuelles avec frottement aux points B et C , de normales \vec{y} et $-\vec{y}$ respectivement. La liaison entre (S) et (S_0) est ponctuelle avec frottement (coefficient de frottement f également) au point A , de normale $-\vec{x}$, si l'on considère que $\{\omega t\}$ est petit.

Les torseurs d'action mécanique aux points A, B et C sont de la forme :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{C}(S_0 \rightarrow S)\} &= \begin{Bmatrix} N\vec{x} + T\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A \\ \{\mathcal{C}(S_1 \xrightarrow{B} S)\} &= \begin{Bmatrix} X_B\vec{x} + Y_B\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B \\ \{\mathcal{C}(S_1 \xrightarrow{C} S)\} &= \begin{Bmatrix} X_C\vec{x} + Y_C\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C \end{aligned}$$

L'action mécanique de la pesanteur est négligée. On donne :

$m = 0,1$ kg; $a = 17$ mm; $l = 80$ mm; $r = 60$ mm; $e = 8$ mm; $\Delta p = 0,1$ bar; $\omega = 10\pi$ rad/s (300 tr/min); $f = 0,1$.

QUESTIONS

1° Montrer qu'en première approximation :

$$x = r - a + e \cos \omega t.$$

(Faire les approximations nécessaires sachant que $\frac{e}{r} = 0,133$.)

2° Déterminer au point G les torseurs des effets d'inertie d'entraînement et de Coriolis du mouvement de (S) par rapport à R et R_0 .

3° Écrire les trois équations scalaires déduites du principe fondamental de la dynamique appliqué à (S) dans son mouvement par rapport au repère R .

4° Pour ωt petit négatif, déterminer la valeur minimale de ω pour que l'extrémité A de (S) soit en contact avec l'alésage de (S_0) . (Faire les approximations nécessaires.)

5° Pour ωt petit positif, déterminer la valeur maximale que peut avoir f pour qu'il n'y ait pas arc-boutement de (S) dans (S_1) .

RÉPONSES

1° Soit H le pied de la perpendiculaire abaissée c sur OA .

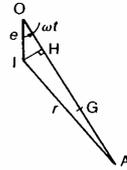


Fig.

On peut écrire que $OA = OH + HA$ d'où $x + a = e \cos \omega t + \sqrt{r^2 - e^2 \sin^2 \omega t}$ $e^2 \sin^2 \omega t$ étant négligeable devant r^2 , on trouve : $x = r - a + e \cos \omega t$.

$$\begin{aligned} 2^\circ \{\mathcal{D}_{ic}(S, R/R_0)\} &= \begin{Bmatrix} mx\omega^2\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G \\ \{\mathcal{D}_{ic}(S, R/R_0)\} &= \begin{Bmatrix} 2m\omega^2e \sin \omega t \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G \end{aligned}$$

3° En supposant $\sin \omega t = 0$ et $\cos \omega t = 1$, on obtie

$$\begin{cases} N + X_B + X_C = -m\omega^2(r - a + 2e) \\ T + Y_B + Y_C = 2el\Delta p \\ aT + (a - 2e)Y_B - aY_C = (a - e)2el\Delta p. \end{cases}$$

$$4^\circ \omega^2 > \frac{2fael\Delta p}{m(a - e)(r - a + 2e)} \quad (\omega > 24,71 \text{ rad/s} = 236 \text{ tr/m})$$

$$5^\circ f < \frac{a - e}{a + e} \quad (f < 0,6).$$

* 5 — Effet gyroscopique

On peut mettre en évidence simplement l'effet gyroscopique en réalisant l'une des petites expériences suivantes :

— Un parapluie ouvert repose sur l'index en un point A de son manche horizontal, voisin de son centre d'inertie G (figure 23).

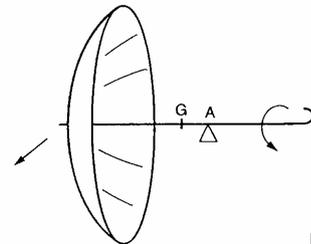


Fig.

Si on lâche le parapluie, dans cette position, sans donner aucun mouvement initial, celui-ci tourne verticalement. Par contre, si on lâche le parapluie après lui avoir donné un mouvement de rotation rapide aut

de son axe, celui-ci, au lieu de tomber verticalement se met à tourner autour du point A dans un plan horizontal. Le sens de rotation dépendant du sens de rotation initiale donnée.

— Une expérience semblable peut être réalisée avec une toupie (voir paragraphe 4.2).

C'est grâce à un mouvement de rotation rapide autour de son axe que le moment du poids de la toupie, par rapport à sa pointe, peut être équilibré par un moment, dit moment du couple gyroscopique. Dans ce mouvement l'axe de la toupie décrit un cône.

— Une autre expérience simple consiste à balancer à bout de bras une perceuse portative dont l'axe du moteur est situé dans le plan d'oscillation du bras, perpendiculairement au bras. Lorsque le moteur tourne, le bras est sollicité en torsion par le moment du couple gyroscopique, dans un sens ou dans l'autre suivant le sens du mouvement du bras.

Le but du problème qui suit est de mesurer le moment du couple gyroscopique, créé par un gyroscope de laboratoire (figure 24).

Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère galiléen lié au bâti (S_0) du gyroscope, l'axe (O, \vec{z}_0) étant dirigé suivant la verticale ascendante. Soit $\vec{g} = -g\vec{z}_0$ l'accélération de la pesanteur.

Le cadre (S_1) a une liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_0) avec (S_0). Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)$ un repère lié à ce cadre. On pose : $\psi = (\vec{x}_0, \vec{x})$. Un moteur (M_1) lié à (S_0) entraîne (S_1) en rotation.

Le cadre (S_2) a une liaison pivot sans frottement d'axe (O, \vec{y}) avec (S_1).

Soit $R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}, \vec{z}_2)$ un repère lié à (S_2). On pose : $\theta = (\vec{z}_0, \vec{z}_2)$.

Le rotor (S) a une liaison pivot d'axe (O, \vec{x}_2) avec (S_2). Un moteur (M_2) lié à (S_2) entraîne (S) à vitesse angulaire constante. On pose

$$\vec{\Omega}(S/R_2) = \varphi' \vec{x}_2 \text{ avec } \varphi' = \text{constante.}$$

Ce système est conçu de telle façon que le centre d'inertie de l'ensemble constitué par (S_2), (M_2) et (S) se trouve sur l'axe (O, \vec{y}). Alors $\theta = 0$ lorsque $\psi' = 0$. La matrice d'inertie, au point O , de l'ensemble constitué par (S_2) et (M_2), rotor du moteur exclu, est :

$$[I_0(S_2, M_2)] = \begin{bmatrix} A_2 & -F_2 & 0 \\ -F_2 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}, \vec{z}_2)}$$

La matrice d'inertie, au point O , de (S), rotor du moteur compris, est :

$$[I_0(S)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}_2, \dots)}$$

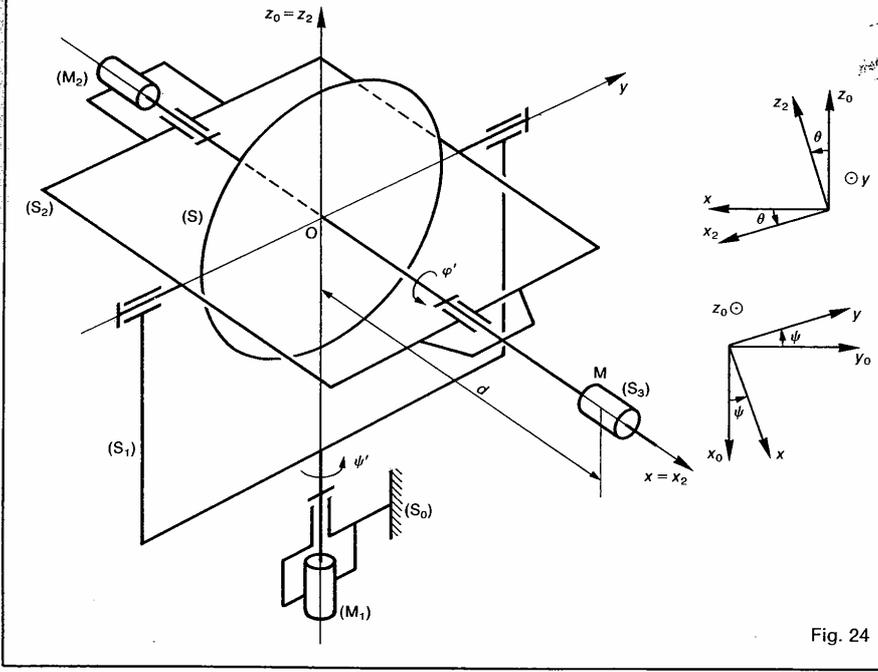


Fig. 24

Un solide (S_3) assimilable à un point matériel de masse m est placé au point M, tel que $\overline{OM} = d\vec{x}_2$ ($d > 0$). Alors (S_2) s'incline, et l'on règle la vitesse de rotation du moteur (M_1) de telle façon que θ redevienne nul. Alors $\vec{x}_2 = \vec{x}$ et $\vec{z}_2 = \vec{z}_0$.

QUESTIONS

1° Quelle équation scalaire obtient-on en appliquant à l'ensemble matériel (E) constitué par (S_2), (M_2), (S) et (S_3), dans son mouvement par rapport à R_0 , le théorème du moment dynamique au point O, en projection sur \vec{y} ?

2° Déterminer ψ' sachant que :

$m = 350 \text{ g}$; $g = 9,81 \text{ m/s}^2$; $d = 15 \text{ cm}$; $\psi' = 4500 \text{ tr/min}$; $A = 1,22 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

RÉPONSES

1° En supposant $\theta = 0$ et $\varphi' = \text{constante}$, on obtient relation :

$A\varphi'\psi' = mgd$

on en déduit que ψ' est constant.

2° Avec les valeurs proposées : $\psi' = \frac{1}{7} \text{ tr/s}$.

REMARQUES

— Le terme $A\varphi'\psi'$ est appelé moment du cou gyroskopique. C'est lui qui s'oppose au moment poids de (S_3), par rapport à l'axe (O, \vec{y}).

— Lorsqu'on cherche à modifier la direction l'axe du rotor du gyroscope, celui-ci se dérobe tournant autour de (O, \vec{z}_0).

EXERCICES SANS RÉPONSES

6 — Étude de la phase de démarrage d'un variateur de vitesse à plateau, schématisé figure 25.

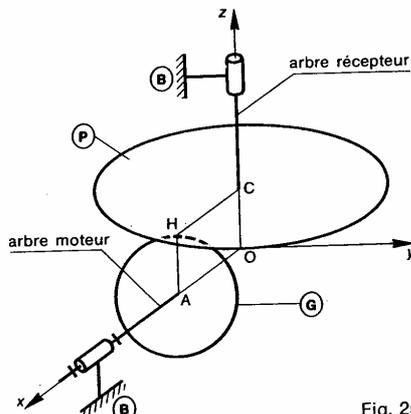


Fig. 25

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère galiléen lié au bâti (B) du variateur. On désigne par $\vec{g} = -g\vec{z}$ l'accélération de la pesanteur.

Le galet (G) est lié à l'arbre moteur qui a une liaison pivot sans frottement d'axe (O, \vec{x}) avec le bâti (B) (l'arbre moteur est immobilisé en translation après réglage).

Le galet (G) est assimilé à un disque de rayon r d'épaisseur négligeable, de centre A situé sur l'axe (O, \vec{x}), dont le plan est perpendiculaire à \vec{x} .

On pose :

$\overline{OA} = \lambda\vec{x}$, λ : constante positive donnée;

I : moment d'inertie par rapport à l'axe (O, \vec{x}) de l'ensemble constitué par l'arbre moteur et le galet (G);

$C_m\vec{x}$: moment du couple exercé par le moteur l'arbre moteur.

$\overline{\Omega}(G/R) = \alpha'\vec{x}$.

Le plateau (P) est lié à l'arbre récepteur qui a liaison pivot glissant sans frottement d'axe (O, \vec{z}) et le bâti (B).

Le plateau (P) est circulaire de rayon $R > \lambda$, de ce C situé sur l'axe (O, \vec{z}); son plan est perpendiculaire à \vec{z} .

On pose :

$\overline{OC} = r\vec{z}$ ((G) et (P) sont supposés constamment contact au point H);

m : masse de l'ensemble constitué par l'arbre récepteur et le plateau (P);

J : moment d'inertie par rapport à l'axe (O, \vec{z}) l'ensemble constitué par l'arbre récepteur et le plateau.

$C_r\vec{z}$: moment du couple exercé par le récepteur l'arbre récepteur;

$\overline{\Omega}(P/R) = \beta'\vec{z}$.

Soit f le coefficient de frottement entre le galet (G) et le plateau (P).

L'action mécanique de contact de (G) sur (P) représentée par le torseur :

$\{ \mathcal{T}(G \rightarrow P) \} = \begin{Bmatrix} \vec{F} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_H$.

Posons $\vec{F} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z}$.

QUESTIONS

1° Déterminer le vecteur vitesse de glissement au H, de (P) par rapport à (G).

2° Quelle équation scalaire obtient-on, en appliquant point A, en projection sur \vec{x} , le théorème du moment dynamique à l'ensemble {galet, arbre moteur} dans son mouvement par rapport à R?

3° Quelle équation scalaire obtient-on, en appliquant point C, en projection sur \vec{z} , le théorème du moment dynamique à l'ensemble {plateau, arbre récepteur} dans son mouvement par rapport à R?

dynamique à l'ensemble {plateau, arbre récepteur} dans son mouvement par rapport à R?

4° Déterminer Z.

5° Sachant qu'à la date $t=0$

$$\begin{cases} \alpha'(0) = \omega > 0 \\ \beta'(0) = 0. \end{cases}$$

a) Déterminer X et Y pendant la phase de glissement entre le plateau (P) et le galet (G).

b) Déterminer la durée T de la phase de glissement entre (P) et (G), si l'on considère que pendant cette phase C_m et C, sont constants.

Application numérique :

$I = 0,0003 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; $J = 0,015 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; $C_m = 0,2 \text{ N} \cdot \text{m}$;
 $C_r = 0,1 \text{ N} \cdot \text{m}$; $f = 0,2$; $m = 3 \text{ kg}$; $g = 9,81 \text{ m/s}^2$; $r = 3 \text{ cm}$;
 $\lambda = 10 \text{ cm}$; $\omega = 31,42 \text{ rad/s}$ (300 tr/min).

7 — La figure 26 représente le dispositif de commande d'une tourelle de machine outil.

Soit $R_0(O, \bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ un repère galiléen lié au bâti (0). La tourelle, non représentée sur la figure, est liée à

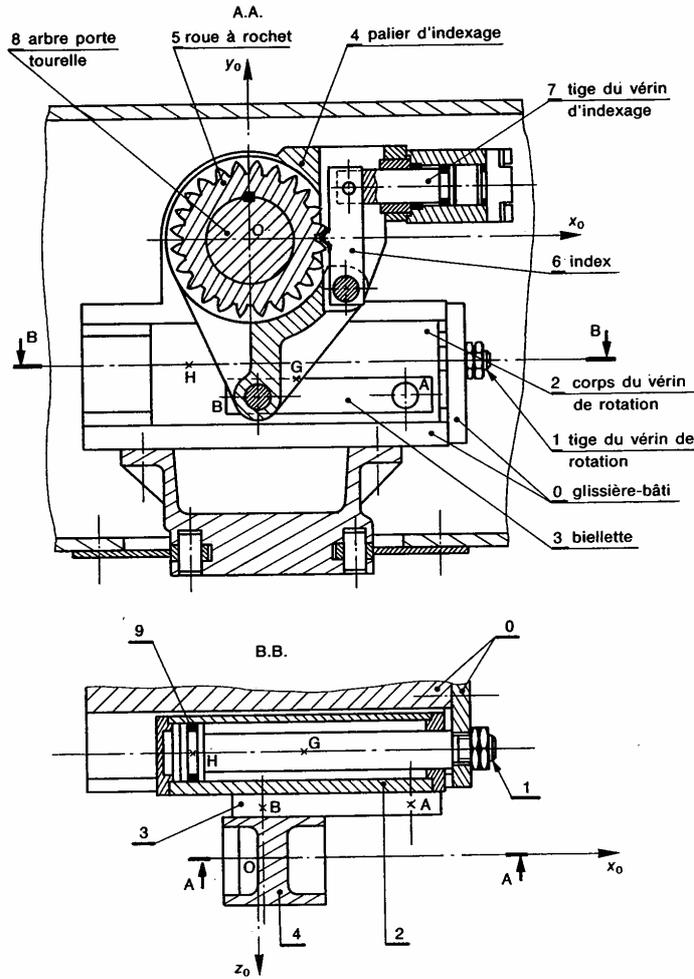


Fig. 26

l'arbre (8). Cet arbre, en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_0) avec le bâti (0), est entraîné en rotation par l'intermédiaire du dispositif d'indexage constitué par le palier (4), la roue à crochet (5), l'index (6) et le vérin (7).

Le mouvement de rotation du palier (4) autour de l'axe (O, \vec{z}_0) est obtenu par le déplacement du corps (2) du vérin, relié au palier (4) par la biellette (3).

Une liaison glissière d'axe (G, \vec{x}_0) assure le guidage de (2) par rapport au bâti (0). G est le centre d'inertie de (2). La biellette (3) a deux liaisons linéiques annulaires d'axes (A, \vec{z}_0) et (B, \vec{z}_0) avec (2) et (4) respectivement. Les liaisons définies précédemment sont sans frottement.

On suppose que le centre d'inertie de l'ensemble matériel (S) constitué par (4), (5), (6), (7), (8) et la tourelle est situé sur l'axe de rotation (O, \vec{z}_0) .

Le moment d'inertie de (S) autour de (O, \vec{z}_0) est $I = 0,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. La masse du corps (2) du vérin est $m = 4 \text{ kg}$. Celle des autres pièces en mouvement est négligée.

Au cours du mouvement, les joints d'étanchéité tel que (9) exercent sur la tige (1) une action mécanique représentée par la force $(H, F\vec{x}_0)$, telle que

$$|F| = \text{constante} = 50 \text{ N.}$$

On considère ce mécanisme à la date t , telle que :

- l'accélération angulaire du palier (4) par rapport au bâti (0) soit : $\theta'' = -50 \text{ rad/s}^2$;
- sa configuration, différente de celle de la figure 26, soit définie par (en millimètres) :

$$\vec{OB} = -69\vec{x}_0 - 126\vec{y}_0 - 48\vec{z}_0$$

$$\vec{OA} = 66\vec{x}_0 - 145\vec{y}_0 - 48\vec{z}_0$$

$$\vec{GA} = 100\vec{x}_0 - 18\vec{y}_0 + 48\vec{z}_0$$

$$\vec{GH} = -100\vec{x}_0 + 12\vec{y}_0.$$

L'action mécanique de la pesanteur est négligée.

QUESTIONS

1° Déterminer à la date t l'action mécanique exercée par la biellette (3) sur le palier (4).

2° La pression motrice dans le vérin de rotation, côté fond est $p = 10 \text{ bars}$, la contre-pression côté tige est $q = 4 \text{ bars}$.

Le rapport des diamètres de la tige (1) et du cylindre intérieur du corps (2) est $K = \frac{2}{3}$.

Déterminer le diamètre du piston pour obtenir le mouvement précédent.

3° Déterminer à la date t le torseur d'action mécanique, au point G , du bâti (0) sur le corps (2) du vérin.

8 — Le dessin de la figure 27 représente une tête pneumatique destinée à recevoir un verre pendant l'usinage de sa lèvre. Le pied du verre à la forme indiquée sur le dessin. Ce pied est plaqué et serré sur la face F de la tête par 3 pièces (4) situées à 120° les unes des autres

Au cours de l'usinage (chauffage, découpage, polissage de la lèvre) la tête est entraînée en rotation par rapport au plateau (0). Le passage d'un poste de travail à autre est obtenu par la rotation de (0) autour d'un axe parallèle à celui de la tête.

Le but de l'étude est de déterminer la variation l'effort de serrage du pied du verre en fonction de vitesse de rotation de la tête par rapport au plate

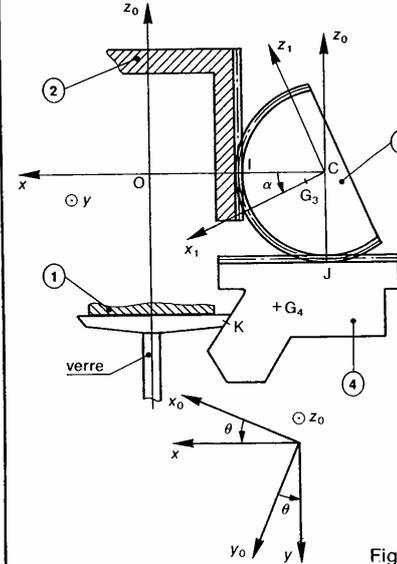


Fig.

Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère galiléen lié au plateau (0), l'axe (O, \vec{z}_0) étant placé suivant l'axe de rotation de la tête. On désigne par $\vec{g} = -g\vec{z}_0$ l'accélération d pesanteur.

Le corps (1) de la tête pneumatique a une liaison p d'axe (O, \vec{z}_0) avec (0). Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)$ un repèr à (1). On pose : $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x})$. La liaison entre la pièce représentée sur le dessin, et le corps (1) est glissière frottement de direction \vec{x} . L'action mécanique de (4) le pied du verre est définie par le torseur :

$$\{\mathcal{T}(4 \rightarrow \text{verre})\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_K \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_K$$

avec $\vec{R}_K = X_K\vec{x} + Y_K\vec{y} + Z_K\vec{z}_0$.

Soient m_4 la masse de (4) et G_4 son centre d'inertie pose : $r_4 = -\vec{x} \cdot \vec{OG}_4$ ($r_4 > 0$).

(4) est entraînée en translation par un secteur circ denté (3), de masse m_3 , de centre d'inertie G_3 , a une liaison pivot sans frottement d'axe (C, \vec{y}) avec On pose : $\vec{OC} = -d\vec{x}$ ($d > 0$).

Soit $R_3(C, \vec{x}_1, \vec{y}, \vec{z}_1)$ un repère lié à (3), tel que $\vec{CG}_3 = (a > 0)$.

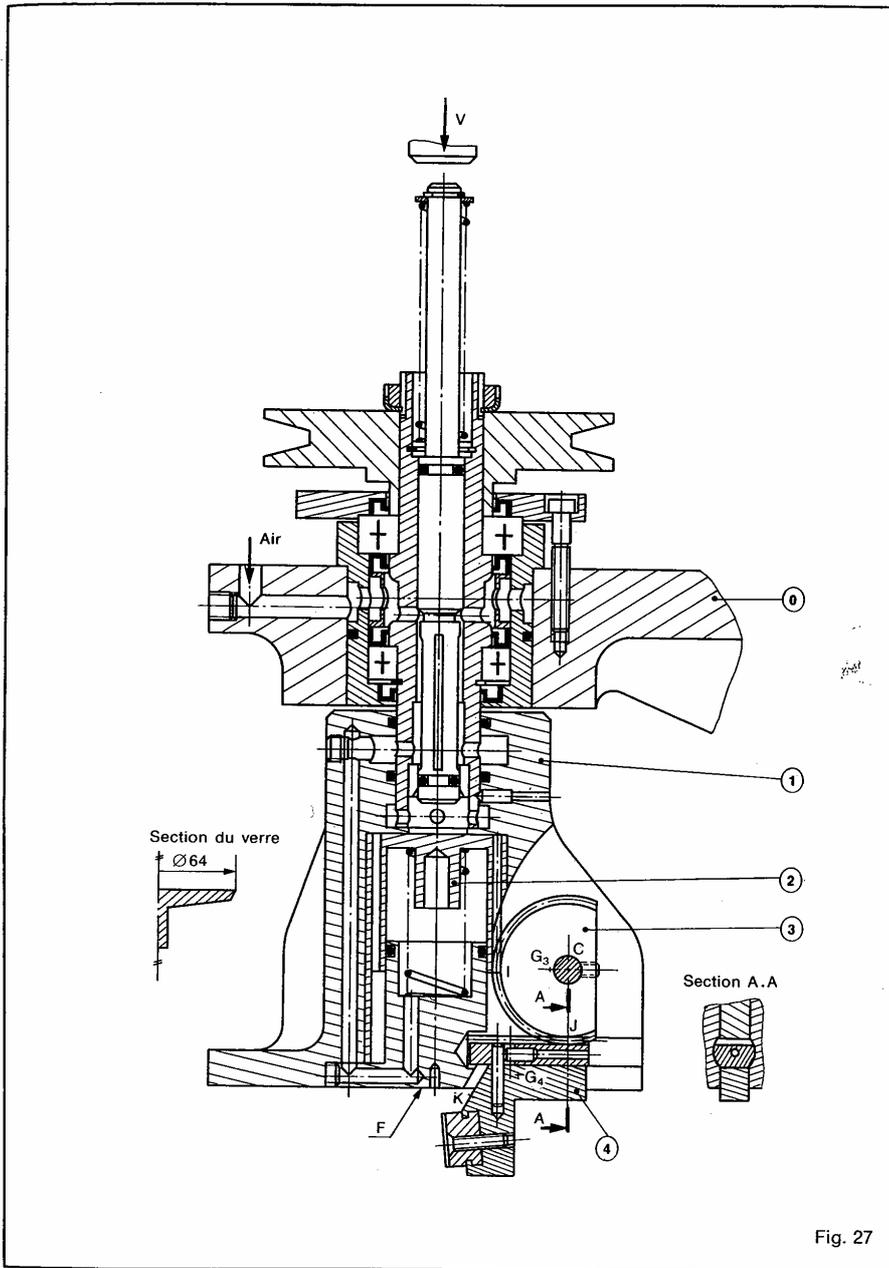


Fig. 27

On pose : $\alpha = (\tilde{x}, \tilde{x}_1)$.

(α et r_4 sont constants lorsque le pied du verre est serré.)

L'action mécanique de (3) sur (4) est représentée par le torseur :

$$\{\mathcal{T}((3) \rightarrow (4))\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

On pose : $X_1 = \tilde{x} \cdot \vec{R}_1$

$$\vec{C}\vec{I} = -r_3 \tilde{z}_0 \quad (r_3 : \text{constante positive})$$

Les trois secteurs circulaires tels que (3) sont entraînés en rotation par une pièce (2) ayant une liaison pivot glissant d'axe (O, \tilde{z}_0) avec (1).

L'action mécanique de (2) sur (3) est représentée par le torseur :

$$\{\mathcal{T}((2) \rightarrow (3))\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

On pose : $Z_1 = \tilde{z}_0 \cdot \vec{R}_1$

$$\vec{C}\vec{I} = r_3 \tilde{x}$$

La valeur de Z_1 est fonction des actions mécaniques exercées par l'air comprimé et le ressort sur la pièce (2).

QUESTIONS

1° En supposant la masse du secteur circulaire (3) concentrée en son centre d'inertie, écrire au point C, en projection sur \tilde{y} , le théorème du moment dynamique appliqué à (3) dans son mouvement par rapport à R_0 .

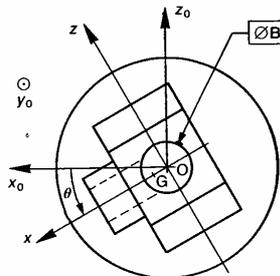
2° Écrire en projection sur \tilde{x} , le théorème de la résultante dynamique appliqué au solide (4) dans son mouvement par rapport à R_0 .

3° Sachant que :

$m_3 = 160 \text{ g}$; $m_4 = 100 \text{ g}$; $g = 9,81 \text{ m/s}^2$; $Z_1 = 230 \text{ N}$; $\alpha = 30^\circ$; $r_3 = 30 \text{ mm}$; $a = 8 \text{ mm}$; $d = 57 \text{ mm}$; $r_4 = 52 \text{ mm}$.

Donner l'expression numérique de X_K en fonction de θ' .
Quelle est la valeur de X_K , pour $\theta' = 500 \text{ tr/min}$?
Pour quelle valeur de θ' , X_K est-elle nulle?

*9 — Sur la pièce (P) schématisée figure 29 on veut réaliser l'usinage suivant :
— dressage de la face A,
— perçage et alésage du diamètre B.
Pour cela, on utilise un montage de tournage (M) pour mettre en place la pièce et l'bloquer en position.



Soit $R_0(O, \tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{z}_0)$ un repère galiléen lié au bâti (S_0) du tour, l'axe (O, \tilde{y}_0) étant placé suivant l'axe de la broche (S). On désigne par $\vec{g} = -g\tilde{z}_0$ l'accélération de la pesanteur.

Soit $R(O, \tilde{x}, \tilde{y}_0, \tilde{z})$ un repère lié à l'ensemble (E) constitué par (S), (M) et (P). On pose : $\theta = (\tilde{x}_0, \tilde{x})$. Un moteur assure : $\theta' = \text{constante} = \omega$.

L'ensemble constitué par (S) et (M) est dynamiquement équilibré autour de l'axe (O, \tilde{y}_0). Par contre, la pièce (P) n'est pas dynamiquement équilibrée à cause de la présence d'un bossage d'axe de symétrie matérielle (I, \tilde{x}) (I point de l'axe (O, \tilde{y}_0)).

Le but de l'étude est d'équilibrer dynamiquement (E) autour de l'axe (O, \tilde{y}_0).

Soient m la masse de la pièce (P) et G son centre d'inertie, défini par : $\vec{O}\vec{G} = a\tilde{x}$ ($a > 0$).

La broche (S) a une liaison pivot d'axe (O, \tilde{y}_0) avec (S_0). Cette liaison est réalisée par l'association en parallèle des deux liaisons sans frottement (L_1) et (L_2) suivantes :

(L_1) : Liaison rotule de centre A_1 , tel que

$$\vec{O}\vec{A}_1 = -l_1 \tilde{y}_0 \quad (l_0 > 0)$$

(L_2) : Liaison linéique annulaire d'axe (O, \tilde{y}_0) et de centre A_2 , tel que

$$\vec{O}\vec{A}_2 = -l_2 \tilde{y}_0 \quad (l_2 > l_1).$$

Les torseurs d'action mécanique de ces liaisons sont de la forme :

$$\{\mathcal{T}(S_0 \xrightarrow{L_1} S)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{A_1}$$

$$\{\mathcal{T}(S_0 \xrightarrow{L_2} S)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{A_2}$$

QUESTIONS

1° Montrer que la matrice d'inertie de la pièce (P), au point O, dans la base ($\tilde{x}, \tilde{y}_0, \tilde{z}$), est de la forme :

$$[I_0(S)] = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\tilde{x}, \tilde{y}_0, \tilde{z})}$$

2° Par application du principe fondamental de la dynamique à l'ensemble {(S), (M), (P)} dans son mouvement par rapport à R_0 , montrer que les résultantes générales \vec{R}_1 et \vec{R}_2 des torseurs d'action mécanique de (S_0) sur (S) sont données par les relations :

$$(l_2 - l_1) \vec{R}_1 = -\omega^2(F + mal_2) \tilde{x} + mgl_2 \tilde{z}_0$$

$$(l_2 - l_1) \vec{R}_2 = \omega^2(F + mal_1) \tilde{x} - mgl_1 \tilde{z}_0$$

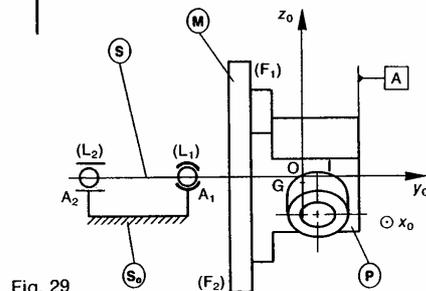


Fig. 29

Dans ce calcul on ne tiendra pas compte des masses de (S) et (M), ces deux ensembles étant dynamiquement équilibrés.

3° En déduire les conditions d'équilibrage dynamique de (P).

4° On veut équilibrer dynamiquement (E) en plaçant une masselotte de masse m_1 , supposée ponctuelle, au point M_1 de coordonnées cartésiennes $(a_1, b_1, 0)$ dans le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}_0, \vec{z})$.

Quelles relations doit-il y avoir entre m_1, a_1, b_1 et m, a, F ?

Montrer que la valeur de b_1 ne peut être imposée à priori.

On donne : $F = 36 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; $m = 0,8 \text{ kg}$; $a = 5 \text{ mm}$; $a_1 = -80 \text{ mm}$.

Déterminer m_1 et b_1 .

5° Pour plus de facilité on choisit d'équilibrer dynamiquement (E) en plaçant deux masselottes de masse m_1 et m_2 sur chacune des faces (F_1) et (F_2) du montage de tournage, aux points M_1 et M_2 , respectivement de coordonnées cartésiennes $(a_1, b_1, 0)$ et $(a_2, b_2, 0)$ dans le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}_0, \vec{z})$.

Quelles sont les relations que doivent vérifier m_1, a_1, b_1 et m_2, a_2, b_2 ?

Montrer que nécessairement b_1 doit être différent de b_2 .

On donne : $a_1 = -80 \text{ mm}$; $a_2 = 80 \text{ mm}$; $b_1 = -30 \text{ mm}$; $b_2 = -60 \text{ mm}$.

Déterminer m_1 et m_2 .

*10 — Une butée à billes est constituée (voir figure 30) :

— d'une bague (S_1) , fixe par rapport à un bâti, lié au repère galiléen $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$;

— d'une bague (S_2) dont le mouvement par rapport à la bague (S_1) est représenté par le torseur :

$$\{ \mathcal{V}(S_2/S_1) \} = \begin{Bmatrix} \omega \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

ω étant variable;

— de 19 billes homogènes, de masse m et de rayon r .

On considère la bille (S) de centre C. La trajectoire, dans R_0 , du centre C de cette bille est un cercle de centre O et de rayon a .

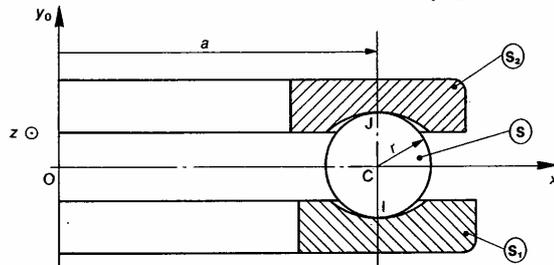


Fig. 30

La bille (S) est en contact en I et J respectivement avec les bagues (S_1) et (S_2) .

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le repère tel que : $\vec{OC} = a\vec{x}$.

On pose $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x})$.

Le but de l'étude est de déterminer la charge axiale minimale que doit supporter cette butée à billes, pour que l'on ait roulement et pivotement sans glissement en I et J. Le non respect de cette condition provoque une usure prématurée de la butée.

Les torseurs d'action mécanique de contact des bagues sur la bille (S) sont de la forme :

$$\{ \mathcal{C}(S_1 \rightarrow S) \} = \begin{Bmatrix} X_1 \vec{x} + Y_1 \vec{y}_0 + Z_1 \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\{ \mathcal{C}(S_2 \rightarrow S) \} = \begin{Bmatrix} X_2 \vec{x} + Y_2 \vec{y}_0 + Z_2 \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

On désigne par f le coefficient de frottement entre les billes et les bagues.

QUESTIONS

1° En considérant qu'il y a roulement sans glissement en I et J, déterminer en fonction de ω, r et a , les torseurs cinématiques :

$$\{ \mathcal{V}(S/R_0) \} \text{ au point C.}$$

$$\{ \mathcal{V}(R/R_0) \} \text{ au point O.}$$

Montrer qu'il y a un pivotement indéterminé entre la bille (S) et chacune des deux bagues.

2° Déterminer au point C le torseur dynamique de la bille (S) dans son mouvement par rapport au repère R_0 .

3° Écrire les équations scalaires traduisant les théorèmes généraux de la dynamique, appliqués à la bille (S) dans son mouvement par rapport au repère R_0 . (L'action mécanique de la pesanteur est négligée.)

4° Déterminer les composantes tangentielles des résultantes générales des actions mécaniques de contact des bagues sur la bille (S).

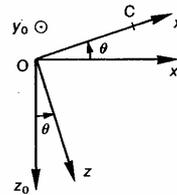
5° Déterminer la charge axiale minimale, P_{min} , que l'on doit exercer sur la bague (S_2) pour que les billes roulent sans glisser sur les bagues.

Application numérique :

$a = 215 \text{ mm}$; $r = 30 \text{ mm}$; $m = 0,882 \text{ kg}$; $f = 0,07$;

$\omega = 40 \frac{\pi}{3} \text{ rad/s}$ (400 tr/min); $\frac{d\omega}{dt} = 0 \text{ rad/s}^2$.

La société des roulements FAG propose $P_{\text{mini}} = 16\,000 \text{ N}$. Que peut-on en conclure?



3 □ énergétique

Les notions de puissance, de travail et d'énergie jouent un rôle très important en mécanique. Une fois ces notions définies et les relations dont elles sont l'objet établies, nous pourrons par exemple :

- déterminer la puissance minimale du moteur d'entraînement d'un mécanisme, pour assurer un mouvement prévu;
- calculer le rendement d'un mécanisme;
- exprimer la conservation de l'énergie mécanique (sous certaines hypothèses) d'un réducteur ou d'un variateur pour obtenir le moment de son couple récepteur.

1. PUISSANCE

1.1. PUISSANCE DÉVELOPPÉE PAR UNE ACTION MÉCANIQUE EXTÉRIÈRE A UN ENSEMBLE MATÉRIEL, DANS SON MOUVEMENT PAR RAPPORT A UN REPÈRE

Soient deux ensembles matériels (Σ) et (E) , distincts, en mouvement par rapport à un repère R . Supposons que l'ensemble matériel (Σ) exerce sur l'ensemble matériel (E) une action mécanique représentée par une densité de forces $\vec{f}(M)$, relativement à la mesure de masse dm en chaque point M de (E) . (Action mécanique de la pesanteur, par exemple.)

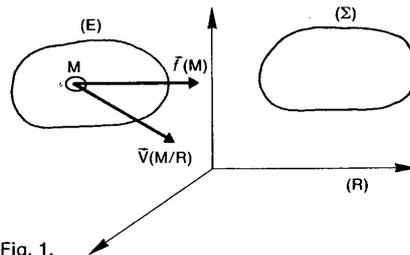


Fig. 1.

248

Définition

La puissance développée, à la date t , par l'action mécanique de (Σ) sur (E) , dans le mouvement (E) par rapport au repère R , est :

$$P(\Sigma \rightarrow E/R) = \int_{M \in E} \vec{f}(M) \cdot \vec{v}(M/R) dm$$

REMARQUES

— La définition précédente est à adapter lors le champ de forces est défini par une densité linéique, surfacique ou volumique.

— Lorsque l'action mécanique de (Σ) sur (E) est représentée par la force $(M, \vec{F}(M))$, la puissance développée s'écrit alors :

$$P(\Sigma \rightarrow E/R) = \vec{F}(M) \cdot \vec{v}(M/R).$$

On retrouve ainsi la définition de la puissance donnée en classe de terminale.

1.2. PUISSANCE DÉVELOPPÉE PAR UNE ACTION MÉCANIQUE EXTÉRIÈRE A UN SOLIDE, DANS SON MOUVEMENT PAR RAPPORT A UN REPÈRE

Lorsque l'ensemble matériel (E) est un solide (S) , le champ des vecteurs vitesse de (S) est représenté par un torseur. Soit :

$$\{v(S/R)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{v}(A \in S/R) \end{array} \right\}$$

le torseur cinématique du mouvement de (S) par rapport à R, défini en un point A de (S). Alors le vecteur vitesse d'un point M quelconque de (S) s'exprime en fonction de $\vec{V}(A \in S/R)$ par la relation :

$$\vec{V}(M \in S/R) = \vec{V}(A \in S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overline{AM}$$

Remplaçons ce vecteur dans l'expression de la puissance développée par l'action mécanique de (Σ) sur (S), dans le mouvement de (S) par rapport à R :

$$P(\Sigma \rightarrow S/R) = \int_{M \in S} \vec{f}(M) \cdot \vec{V}(M \in S/R) dm$$

soit

$$P(\Sigma \rightarrow S/R) = \int_{M \in S} \vec{f}(M) \cdot [\vec{V}(A \in S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overline{AM}] dm$$

D'où :

$$P(\Sigma \rightarrow S/R) = \int_{M \in S} \vec{f}(M) \cdot \vec{V}(A \in S/R) dm + \int_{M \in S} \vec{f}(M) \cdot [\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overline{AM}] dm$$

Mettons en facteur $\vec{V}(A \in S/R)$ et $\vec{\Omega}(S/R)$ en remarquant au préalable que le produit mixte de la deuxième intégrale peut s'écrire :

$$\vec{\Omega}(S/R) \cdot [\overline{AM} \wedge \vec{f}(M)]$$

on obtient alors :

$$P(\Sigma \rightarrow S/R) = \vec{V}(A \in S/R) \cdot \int_{M \in S} \vec{f}(M) dm + \vec{\Omega}(S/R) \cdot \int_{M \in S} \overline{AM} \wedge \vec{f}(M) dm$$

or le torseur associé à l'action mécanique de (Σ) sur (S) s'écrit au point A :

$$\{\mathcal{C}(\Sigma \rightarrow S)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(\Sigma \rightarrow S) \\ \vec{M}_A(\Sigma \rightarrow S) \end{array} \right\}$$

avec

$$\vec{R}(\Sigma \rightarrow S) = \int_{M \in S} \vec{f}(M) dm$$

et

$$\vec{M}_A(\Sigma \rightarrow S) = \int_{M \in S} \overline{AM} \wedge \vec{f}(M) dm$$

Par conséquent :

$$P(\Sigma \rightarrow S/R) = \vec{R}(\Sigma \rightarrow S) \cdot \vec{V}(A \in S/R) + \vec{M}_A(\Sigma \rightarrow S) \cdot \vec{\Omega}(S/R)$$

La puissance développée par l'action mécanique de (Σ) sur (S), dans le mouvement de (S) par rapport à R, est donc égale au produit du torseur d'action mécanique de (Σ) sur (S) par le torseur cinématique du mouvement de (S) par rapport à R. (Revoir la définition d'un produit de deux torseurs au paragraphe 14 du chapitre 1 de dynamique.) Soit :

$$P(\Sigma \rightarrow S/R) = \{\mathcal{C}(\Sigma \rightarrow S)\} \cdot \{\mathcal{V}(S/R)\}$$

Cas particuliers

— Lorsque le torseur d'action mécanique est un torseur à résultante, la puissance est :

$$P(\Sigma \rightarrow S/R) = \vec{R}(\Sigma \rightarrow S) \cdot \vec{V}(A \in S/R)$$

— Lorsque le torseur d'action mécanique est un couple, la puissance est :

$$P(\Sigma \rightarrow S/R) = \vec{M}_A(\Sigma \rightarrow S) \cdot \vec{\Omega}(S/R)$$

On retrouve ainsi un résultat mis en évidence en classe de terminale.

REMARQUE

La notion de puissance n'a de sens que relativement à un repère. Ainsi la puissance développée par l'action mécanique de (Σ) sur (S) est nulle dans tout repère lié à (S).

Application

Un véhicule à quatre roues se déplace en ligne droite sur une route. Calculons les puissances développées par différentes actions mécaniques au niveau d'une roue arrière motrice.

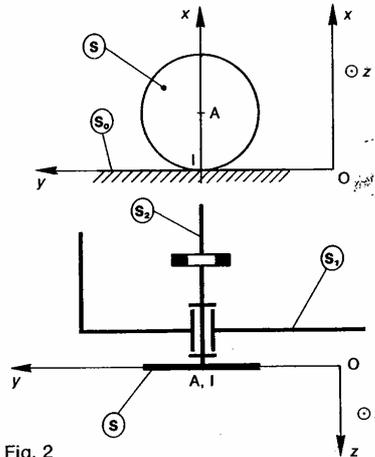


Fig. 2

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à la route (S_0). Le plan (O, \vec{y}, \vec{z}) schématise le plan de la route, d'axe (O, \vec{y}) . L'axe (O, \vec{x}) est vertical ascendant. La roue arrière motrice (S), d'épaisseur négligeable, de centre A, de rayon a, roule sans glisser au point I sur l'axe (O, \vec{y}) .

(S) a une liaison pivot sans frottement d'axe (A, \vec{z}) avec le châssis (S_1). L'arbre de transmission (S_2) entraîne en rotation (S) en ne lui transmettant qu'un couple de moment $C\vec{z}$ (liaison avec joint de Cardan, par exemple).

Considérons les torseurs cinématiques suivants, exprimés dans la base de R :

$$\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{V}(S/S_1)\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

Dynamique

ainsi que les torseurs d'actions mécaniques :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{C}(S_0 \rightarrow S)\} &= \begin{Bmatrix} N & 0 \\ T & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}; \\ \{\mathcal{C}(S \rightarrow S_1)\} &= \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}; \\ \{\mathcal{C}(S_2 \rightarrow S)\} &= \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

QUESTION

Déterminer la puissance développée par l'action mécanique de

- 1° (S_2) sur (S), dans le mouvement de (S) par rapport à (S_1);
- 2° (S_0) sur (S), dans le mouvement de (S) par rapport à (S_0);
- 3° (S_0) sur (S), dans le mouvement de (S) par rapport à (S_1);
- 4° (S) sur (S_1), dans le mouvement de (S_1) par rapport à (S_0);
- 5° (S) sur (S_1), dans le mouvement de (S_1) par rapport à (S).

RÉPONSE

Ces différentes puissances se calculent par les produits des torseurs suivants, en prenant soin de bien les exprimer au même point :

$$1^\circ P(S_2 \rightarrow S/S_1) = \{\mathcal{C}(S_2 \rightarrow S)\} \cdot \{\mathcal{V}(S/S_1)\}$$

$$P(S_2 \rightarrow S/S_1) = C\omega.$$

$$2^\circ P(S_0 \rightarrow S/S_0) = \{\mathcal{C}(S_0 \rightarrow S)\} \cdot \{\mathcal{V}(S/S_0)\} \\ = \bar{R}(S_0 \rightarrow S) \cdot \bar{V}(I \in S/S_0).$$

Comme (S) roule sans glisser sur (S_0), $\bar{V}(I \in S/S_0)$ est nul, et :

$$P(S_0 \rightarrow S/S_0) = 0.$$

$$3^\circ P(S_0 \rightarrow S/S_1) = \{\mathcal{C}(S_0 \rightarrow S)\} \cdot \{\mathcal{V}(S/S_1)\}$$

$$P(S_0 \rightarrow S/S_1) = -a\omega T.$$

$$4^\circ P(S \rightarrow S_1/S_0) = \{\mathcal{C}(S \rightarrow S_1)\} \cdot \{\mathcal{V}(S_1/S_0)\}$$

$$P(S \rightarrow S_1/S_0) = Y \cdot v.$$

$$5^\circ P(S \rightarrow S_1/S) = \{\mathcal{C}(S \rightarrow S_1)\} \cdot \{\mathcal{V}(S_1/S)\}$$

$$P(S \rightarrow S_1/S) = 0.$$

Conséquence (utile au paragraphe 1.3)

La puissance développée par l'action mécanique de l'ensemble matériel (Σ) sur l'ensemble matériel (E) (qui n'est pas nécessairement un solide), dans le mouvement de (E) par rapport au repère R , a été définie au *paragraphe 1.1* par l'expression :

$$P(\Sigma \rightarrow E/R) = \int_{M \in E} \vec{f}(M) \cdot \vec{V}(M/R) dm.$$

Cette puissance, pour le mouvement de (E) par rapport à un autre repère R_1 s'écrit :

$$P(\Sigma \rightarrow E/R_1) = \int_{M \in E} \vec{f}(M) \cdot \vec{V}(M/R_1) dm.$$

Par suite :

$$P(\Sigma \rightarrow E/R) - P(\Sigma \rightarrow E/R_1) \\ = \int_{M \in E} \vec{f}(M) \cdot [\vec{V}(M/R) - \vec{V}(M/R_1)] dm$$

Soit d'après la relation de composition des vecteurs vitesse au point M entre les repères R et R_1 :

$$P(\Sigma \rightarrow E/R) - P(\Sigma \rightarrow E/R_1) \\ = \int_{M \in E} \vec{f}(M) \cdot \vec{V}(M \in R_1/R) dm$$

expression qui se met donc sous la forme :

$$P(\Sigma \rightarrow E/R) - P(\Sigma \rightarrow E/R_1) \\ = \{\mathcal{C}(\Sigma \rightarrow E)\} \cdot \{\mathcal{V}(R_1/R)\} \quad ($$

1.3. PUISSANCE DÉVELOPPÉE PAR LES ACTIONS MUTUELLES ENTRE DEUX ENSEMBLES MATÉRIELS

Soient deux ensembles matériels (Σ) et (E) distincts, en mouvement par rapport à un repère

Définition

La puissance développée, à la date t , par actions mutuelles entre (Σ) et (E), dans le mouvement par rapport à un repère R , est :

$$P(\Sigma \leftrightarrow E/R) = P(\Sigma \rightarrow E/R) + P(E \rightarrow \Sigma/R)$$

Propriété

La puissance développée par les actions mutuelles entre (Σ) et (E) est indépendante du repère

La relation (1) permet d'écrire :
— pour l'action mécanique de (Σ) sur (E) :

$$P(\Sigma \rightarrow E/R) - P(\Sigma \rightarrow E/R_1) \\ = \{\mathcal{C}(\Sigma \rightarrow E)\} \cdot \{\mathcal{V}(R_1/R)$$

— pour l'action mécanique de (E) sur (Σ) :

$$P(E \rightarrow \Sigma/R) - P(E \rightarrow \Sigma/R_1) \\ = \{\mathcal{C}(E \rightarrow \Sigma)\} \cdot \{\mathcal{V}(R_1/R)$$

additionnons membre à membre ces deux égalités

$$P(\Sigma \leftrightarrow E/R) - P(\Sigma \leftrightarrow E/R_1) \\ = [\{\mathcal{C}(\Sigma \rightarrow E)\} + \{\mathcal{C}(E \rightarrow \Sigma)\}] \cdot \{\mathcal{V}(R_1/R$$

D'après le théorème des actions mutuelles le second membre est nul. Par suite :

$$P(\Sigma \leftrightarrow E/R) = P(\Sigma \leftrightarrow E/R_1).$$

Ce qui prouve que la puissance développée par les actions mutuelles entre (Σ) et (E) est indépendante du repère choisi pour la calculer. Par conséquent, cette puissance sera simplement notée :

$$P(\Sigma \leftrightarrow E).$$

Application

Soient (S_1) et (S_2) deux solides en contact ponctuel avec frottement en un point A (coefficient de frottement : $f = \tan \varphi$), et (Π) le plan tangent commun en A à (S_1) et (S_2) .

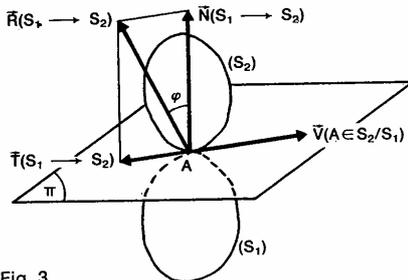


Fig. 3

Le torseur d'action mécanique de (S_1) sur (S_2) est de la forme, au point A :

$$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(S_1 \rightarrow S_2) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$

(Le contact est supposé rigoureusement ponctuel).

On pose

$$\vec{R}(S_1 \rightarrow S_2) = \vec{N}(S_1 \rightarrow S_2) + \vec{T}(S_1 \rightarrow S_2)$$

avec

$$\begin{aligned} \vec{N}(S_1 \rightarrow S_2) &\perp (\Pi) && \text{(effort normal)} \\ \vec{T}(S_1 \rightarrow S_2) &\in (\Pi) && \text{(effort tangentiel).} \end{aligned}$$

Le torseur cinématique du mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) est de la forme, au point A :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_2/S_1) \\ \vec{V}(A \in S_2/S_1) \end{Bmatrix}_A$$

Le vecteur vitesse de glissement $\vec{V}(A \in S_2/S_1)$ est un vecteur de même direction que le vecteur $\vec{T}(S_1 \rightarrow S_2)$ et de sens contraire (paragraphe 3.3 du chapitre 1 de statique).

QUESTION 1

Déterminer la puissance développée par les actions mutuelles entre (S_1) et (S_2) .

RÉPONSE

La puissance développée par les actions mutuelles entre (S_1) et (S_2) s'écrit par définition, par rapport à un repère R :

$$P(S_1 \leftrightarrow S_2) = P(S_1 \rightarrow S_2/R) + P(S_2 \rightarrow S_1/R).$$

Cette puissance est indépendante du repère R, par conséquent, si l'on choisit R lié à (S_1) :

$$P(S_1 \leftrightarrow S_2) = P(S_1 \rightarrow S_2/S_1).$$

Puissance qui se calcule par le produit des deux torseurs définis précédemment :

$$P(S_1 \leftrightarrow S_2) = \{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} \cdot \{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}$$

soit :

$$P(S_1 \leftrightarrow S_2) = \vec{R}(S_1 \rightarrow S_2) \cdot \vec{V}(A \in S_2/S_1)$$

ou encore, en faisant intervenir l'effort tangentiel :

$$P(S_1 \leftrightarrow S_2) = \vec{T}(S_1 \rightarrow S_2) \cdot \vec{V}(A \in S_2/S_1).$$

Le produit scalaire des deux vecteurs intervenant dans cette expression étant négatif ou nul, la puissance développée par les actions mutuelles entre (S_1) et (S_2) est négative ou nulle. C'est une puissance perdue par frottement entre les deux solides et qui se transforme en chaleur.

QUESTION 2

A quelle condition la puissance développée par les actions mutuelles entre (S_1) et (S_2) est-elle nulle ?

RÉPONSE

Cette puissance est nulle si :

- le contact entre (S_1) et (S_2) est sans frottement, ou si :
- (S_2) roule sans glisser sur (S_1) .

1.4. LIAISON PARFAITE ENTRE DEUX SOLIDES

Définition

Deux solides (S_1) et (S_2) ont une liaison parfaite si, quel que soit le mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) autorisé par la liaison, la puissance développée par les actions mutuelles entre (S_1) et (S_2) est nulle.

Soit

$$P(S_1 \leftrightarrow S_2) = 0.$$

REMARQUE

Plus précisément, cette puissance doit être nulle quelles que soient les valeurs des composantes, non nulles, des éléments de réduction du torseur cinématique $\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}$ de la liaison entre (S_1) et (S_2) .

Conséquence

Par rapport à un repère R, la puissance développée par les actions mutuelles entre (S_1) et (S_2) s'écrit par définition :

$$P(S_1 \leftrightarrow S_2) = P(S_1 \rightarrow S_2/R) + P(S_2 \rightarrow S_1/R)$$

si R est lié à (S_1) :

$$P(S_1 \leftrightarrow S_2) = P(S_1 \rightarrow S_2/S_1)$$

si R est lié à (S_2) :

$$P(S_1 \leftrightarrow S_2) = P(S_2 \rightarrow S_1/S_2).$$

Dynamique

Par suite une liaison parfaite entre (S_1) et (S_2) est telle que :

$$P(S_1 \rightarrow S_2/S_1) = 0 \quad (2)$$

ou $P(S_2 \rightarrow S_1/S_2) = 0$.

En considérant

le torseur statique $\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\}$

et le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}$ de la liaison entre (S_1) et (S_2) ,

la relation (2) s'écrit :

$$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} \cdot \{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = 0.$$

Ce qui signifie que dans une liaison parfaite les torseurs statique et cinématique de la liaison sont réciproques.

EXEMPLES

Voici deux exemples de liaisons parfaites entre deux solides :

- liaison sans frottement (à contact ponctuel, linéique ou surfacique),
- liaison sans glissement (bille ou cylindre de révolution roulant sans glisser sur un plan). Les résistances au roulement et au pivotement étant éventuellement négligées.

Application

Deux solides (S_1) et (S_2) ont une liaison glissière hélicoïdale sans frottement d'axe (O, \vec{x}) , de pas réduit p .

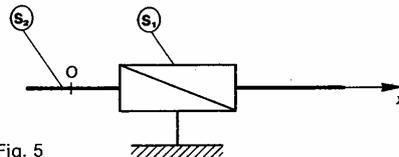


Fig. 5

QUESTION

Déterminer les caractéristiques du torseur d'action mécanique de contact de (S_1) sur (S_2) .

RÉPONSE

La liaison entre (S_1) et (S_2) étant sans frottement est parfaite. Alors $P(S_1 \leftrightarrow S_2) = 0$, soit

$$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} \cdot \{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = 0. \quad (3)$$

Posons

$$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(S_1 \rightarrow S_2) \\ \vec{M}_O(S_1 \rightarrow S_2) \end{Bmatrix}$$

et

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} \alpha' \vec{x} \\ p \alpha' \vec{x} \end{Bmatrix}$$

La relation (3) s'écrit donc :

$$p \alpha' \vec{x} \cdot \vec{R}(S_1 \rightarrow S_2) + \alpha' \vec{x} \cdot \vec{M}_O(S_1 \rightarrow S_2) = 0$$

252

relation qui doit être vérifiée quel que soit le mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) autorisé par la liaison c'est-à-dire quelle que soit α' .

Par suite les éléments de réduction du torseur d'action mécanique de contact de (S_1) sur (S_2) sont tels que :

$$p \alpha' \vec{x} \cdot \vec{R}(S_1 \rightarrow S_2) + \alpha' \vec{x} \cdot \vec{M}_O(S_1 \rightarrow S_2) = 0.$$

On retrouve la propriété du torseur statique de la liaison glissière hélicoïdale déjà mise en évidence, d'une manière beaucoup plus longue, au paragraphe 3.4.7 du chapitre de statique.

REMARQUES

- La notion de liaison parfaite s'étend facilement à une liaison équivalente à plusieurs liaisons placées en parallèle et en série entre (S_1) et (S_2) . Pour cela il suffit de considérer les torseurs statique et cinématique de la liaison équivalente.
- L'hypothèse de liaison parfaite permet une mise en équations d'un problème de dynamique par le principe fondamental ou le théorème de l'énergie cinétique (démonstré au paragraphe sans préjuger de la conception technologique de la liaison).

2. TRAVAIL

2.1. DÉFINITION

Le travail, entre les dates t_1 et t_2 , de l'action mécanique de l'ensemble matériel (Σ) sur l'ensemble matériel (E) , dans le mouvement de (E) par rapport au repère R , est

$$W_R^t(\Sigma \rightarrow E/R) = \int_{t_1}^{t_2} P(\Sigma \rightarrow E/R) dt.$$

Par suite, le travail élémentaire entre les dates t et $t + dt$ est

$$dW(\Sigma \rightarrow E/R) = P(\Sigma \rightarrow E/R) dt.$$

2.2. UNITÉS

— L'unité de travail est le joule.

Le joule est le travail produit par une action mécanique représentée par une force de 1 newton dont le point d'application se déplace de 1 mètre dans la direction et le sens de la force.

— L'unité de puissance est le watt.

Le watt est la puissance d'une action mécanique capable de produire un travail de 1 joule en 1 seconde, de façon uniforme.

Application

Continuons l'application du paragraphe 1.2, sur le véhicule à quatre roues, avec la question suivante :

QUESTION

Déterminer, entre les dates $t_1=0$ et $t_2=30$ s, le travail de l'action mécanique de la roue (S) sur le châssis (S_1), dans le mouvement de (S_1) par rapport à la route (S_0), sachant que pendant cette phase du mouvement : $Y=300$ N et $v=\gamma t$ avec $\gamma=2,2$ m/s².

RÉPONSE

Nous avons montré que : $P(S \rightarrow S_1/S_0) = Y \cdot v$.
Par suite :

$$W_{10}^t(S \rightarrow S_1/S_0) = \int_{t_1}^{t_2} Y \cdot v \, dt$$

Y et γ étant constants :

$$W_{10}^t(S \rightarrow S_1/S_0) = Y \cdot \gamma \int_{t_1}^{t_2} t \, dt$$

soit

$$W_{10}^t(S \rightarrow S_1/S_0) = Y \cdot \gamma \left[\frac{t^2}{2} \right]_{t_1}^{t_2}$$

Par conséquent :

$$W_{10}^t(S \rightarrow S_1/S_0) = 297\,000 \text{ J.}$$

3. ÉNERGIE POTENTIELLE

Soient deux ensembles matériels (Σ) et (E), distincts, en mouvement par rapport à un repère R.

3.1. ÉNERGIE POTENTIELLE D'UN ENSEMBLE MATÉRIEL, ASSOCIÉE A UNE ACTION MÉCANIQUE EXTÉRIURE**Définition**

L'ensemble matériel (E) possède une énergie potentielle, associée à l'action mécanique de (Σ) sur (E), dans le mouvement de (E) par rapport au repère R, s'il existe une fonction scalaire $V(\Sigma \rightarrow E/R)$ telle que :

$$P(\Sigma \rightarrow E/R) = -\frac{d}{dt} V(\Sigma \rightarrow E/R).$$

$V(\Sigma \rightarrow E/R)$ est appelée énergie potentielle de (E), associée à l'action mécanique de (Σ) sur (E), dans le mouvement de (E) par rapport à R.

REMARQUES

- L'existence du signe moins est nécessaire pour interpréter facilement les résultats.
- L'énergie potentielle est une fonction primitive de la puissance. Elle est donc définie à une constante près, que l'on choisit arbitrairement.
- On dit que la puissance dérive d'une énergie potentielle (au signe près).

EXEMPLE : Énergie potentielle de la pesanteur

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à la terre tel que le vecteur unitaire \vec{z} soit dirigé suivant la verticale ascendante, et l'origine O placée, par exemple, au niveau du sol.

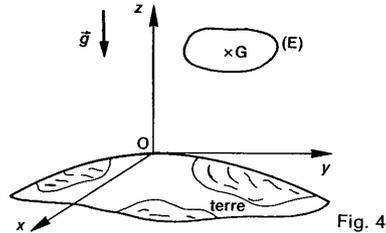


Fig. 4

Dans une région localisée de l'espace l'action mécanique de la pesanteur sur un ensemble matériel (E), de masse m et de centre d'inertie G, est représentée par un champ de forces uniforme défini par sa densité massique $\vec{g} = -g\vec{z}$ (accélération de la pesanteur).

Calculons la puissance développée par l'action mécanique de la pesanteur sur (E), dans le mouvement de (E) par rapport à R.

$$P(g \rightarrow E/R) = \int_{M \in E} \vec{g} \cdot \vec{V}(M/R) \, dm$$

soit

$$P(g \rightarrow E/R) = -g\vec{z} \cdot \int_{M \in E} \vec{V}(M/R) \, dm$$

or l'intégrale s'exprime en fonction de $\vec{V}(G/R)$ par la relation (2, du paragraphe 2.2 du chapitre 1 de dynamique) :

$$m\vec{V}(G/R) = \int_{M \in E} \vec{V}(M/R) \, dm.$$

Par conséquent

$$P(g \rightarrow E/R) = -mg\vec{z} \cdot \vec{V}(G/R)$$

comme

$$\vec{V}(G/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{OG} \right]_R$$

$$P(g \rightarrow E/R) = -mg\vec{z} \cdot \left[\frac{d}{dt} \vec{OG} \right]_R$$

\vec{z} étant fixe dans la base de R :

$$P(g \rightarrow E/R) = -mg \left[\frac{d}{dt} \vec{z} \cdot \vec{OG} \right].$$

Posons $z_G = \vec{z} \cdot \vec{OG}$ (coordonnée cartésienne de G sur l'axe (O, \vec{z})).

Alors :

$$P(g \rightarrow E/R) = -mg \left[\frac{d}{dt} z_G \right].$$

Par suite, il existe une énergie potentielle de (E), associée à l'action mécanique de la pesanteur sur (E), dans son mouvement par rapport à R :

$$V(g \rightarrow E/R) = mgz_G$$

définie à une constante près que l'on suppose nulle.

REMARQUES

- Un ensemble matériel possède de l'énergie lorsqu'il a la capacité de développer une puissance (ou de produire un travail).
- L'énergie cinétique et l'énergie potentielle sont les deux formes de l'énergie mécanique (voir paragraphe 4). L'énergie cinétique correspond au mouvement des corps. L'énergie potentielle est de l'énergie en réserve que possède un corps du fait, soit de sa position (eau d'un barrage, marteau pilon), soit de sa forme (ressort),...
- L'énergie potentielle de la pesanteur dépend de la position de l'ensemble matériel (E) par rapport à la terre (fonction croissante de z_G). Elle est égale au travail que peut fournir (E) s'il tombe sur le sol.
- Dans \vec{g} interviennent deux vecteurs : l'un relatif à l'attraction terrestre, l'autre relatif aux effets d'inertie dus à la rotation de la terre (voir paragraphe 5 du chapitre 2 de dynamique). Ce deuxième vecteur, pratiquement négligeable devant le premier (au niveau du sol), ne correspond pas à une action mécanique mais à un mouvement. En toute rigueur il devrait être négligé lorsqu'on parle d'action mécanique de la pesanteur, mais en fait on le considère comme s'il provenait d'une action mécanique.

3.2. ENERGIE POTENTIELLE DE DEUX ENSEMBLES MATERIELS, ASSOCIEE A UNE ACTION MUTUELLE

Définition

Les deux ensembles matériels (Σ) et (E) possèdent une énergie potentielle, associée à une action mutuelle, s'il existe une fonction scalaire $V(\Sigma \leftrightarrow E)$ telle que :

$$P(\Sigma \leftrightarrow E) = -\frac{d}{dt} V(\Sigma \leftrightarrow E).$$

$V(\Sigma \leftrightarrow E)$ est appelée énergie potentielle de (Σ) et (E), associée à l'action mutuelle considérée.

REMARQUES

- Comme la puissance correspondante, $V(\Sigma \leftrightarrow E)$ est indépendante de tout repère.
- L'action mécanique de la pesanteur est, aux effets d'inertie d'entraînement près dus à la rotation de la terre (T), égale à l'action mécanique d'attraction terrestre.

Alors :

$$P(g \rightarrow E/R) = P(T \rightarrow E/R).$$

De plus, comme le repère R est lié à la terre :

$$P(T \rightarrow E/R) = P(T \leftrightarrow E).$$

Par suite l'énergie potentielle de la pesanteur c (E) est aussi l'énergie potentielle de la terre c de (E), associée à leur attraction mutuelle.

EXEMPLE : Énergie potentielle de deux solides entre lesquels est intercalé un ressort de traction-compression de masse nulle.

Deux solides (S_1) et (S_2) ont une liaison pivot glissant d'axe (O, \vec{i}). Un ressort (r) de traction compression de masse nulle, de raideur K , de longueur à vide l placé suivant l'axe (O, \vec{i}) entre (S_1) et (S_2), exerce sur (S_2) une action mécanique représentée par le torseur :

$$\{\mathcal{C}(r \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} -K(l-l_0)\vec{i} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(l : longueur sous charge du ressort).

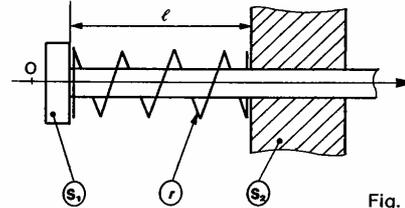


Fig.

Calculons la puissance développée par l'action mécanique du ressort sur (S_1) et (S_2), dans leur mouvement par rapport à un repère R quelconque.

$$P(r \rightarrow S_1, S_2/R) = P(r \rightarrow S_1/R) + P(r \rightarrow S_2/R).$$

Soit :

$$P(r \rightarrow S_1, S_2/R) = \{\mathcal{C}(r \rightarrow S_1)\} \cdot \{\mathcal{V}(S_1/R)\} + \{\mathcal{C}(r \rightarrow S_2)\} \cdot \{\mathcal{V}(S_2/R)\}.$$

Le ressort étant de masse nulle :

$$\{\mathcal{C}(r \rightarrow S_1)\} = -\{\mathcal{C}(r \rightarrow S_2)\}$$

(relation montrée au paragraphe 3 du chapitre 2 d dynamique).

Par suite,

$$P(r \rightarrow S_1, S_2/R) = \{\mathcal{C}(r \rightarrow S_2)\} \cdot \{\mathcal{V}(S_2/R)\} - \{\mathcal{V}(S_1/R)\}.$$

Soit

$$P(r \rightarrow S_1, S_2/R) = \{\mathcal{C}(r \rightarrow S_2)\} \cdot \{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}$$

Cette puissance est indépendante du repère R. Nous la noterons simplement :

$$P(r \rightarrow S_1, S_2).$$

REMARQUE

Vu la forme de cette expression on peut considérer qu'il existe entre (S_1) et (S_2) une action mutuelle représentée par le torseur

$$\{\mathcal{C}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \{\mathcal{C}(r \rightarrow S_2)\}.$$

Au point O, le torseur cinématique du mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) s'écrit :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ dl \\ \frac{d}{dt} \vec{i} \end{Bmatrix}.$$

Par suite,

$$P(r \rightarrow S_1, S_2) = -K(l - l_0) \frac{dl}{dt}.$$

Il existe donc une énergie potentielle de (S_1) et (S_2) associée à leur action mutuelle par l'intermédiaire du ressort (r) :

$$V(r \rightarrow S_1, S_2) = \frac{K}{2} (l - l_0)^2$$

définie à une constante près que l'on suppose nulle.

REMARQUES

— Cette énergie potentielle est positive ou nulle. Elle augmente quand le ressort s'écarte de sa position d'équilibre.

— L'attraction mutuelle entre la terre et un corps est d'une grande similitude avec l'action mutuelle entre deux solides par l'intermédiaire d'un ressort, car soulever un corps revient en fait à déformer le système Terre-corps.

Dans les deux cas l'énergie potentielle disparaît lorsque le système revient à sa position d'équilibre stable : le corps repose sur le sol et le ressort reprend sa longueur à vide.

— Un résultat semblable est obtenu avec un ressort de torsion, de masse nulle, monté entre deux solides ayant une liaison pivot.

4. THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE

Le théorème de l'énergie cinétique constitue l'une des traductions énergétiques du principe fondamental de la dynamique. Démontrons ce théorème pour un solide, puis pour un ensemble de solides.

4.1. POUR UN SOLIDE

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un solide (S) , de masse m , dans son mouvement par rapport à un repère galiléen R_g s'écrit :

$$\{\mathcal{D}(S/R_g)\} = \{\mathcal{T}(\bar{S} \rightarrow S)\}.$$

$\{\mathcal{D}(S/R_g)\}$: torseur dynamique de (S) dans son mouvement par rapport à R_g ;

$\{\mathcal{T}(\bar{S} \rightarrow S)\}$: torseur des actions mécaniques extérieures à (S) s'exerçant sur (S) .

Multiplions les deux membres de cette relation par le torseur cinématique de (S) par rapport à R_g :

$$\{\mathcal{D}(S/R_g)\} \{\mathcal{V}(S/R_g)\} = \{\mathcal{T}(\bar{S} \rightarrow S)\} \{\mathcal{V}(S/R_g)\}.$$

Le membre de droite représente la puissance des actions mécaniques extérieures à (S) s'exerçant sur (S) , dans son mouvement par rapport à R_g , soit $P(\bar{S} \rightarrow S/R_g)$. Cette puissance est appelée *puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures* à (S) .

Pour obtenir le membre de gauche écrivons les éléments de réduction de chaque torseur en un même point A , lié au solide (S) .

$$\begin{aligned} & \{\mathcal{D}(S/R_g)\} \{\mathcal{V}(S/R_g)\} \\ &= \left\{ \int_{M \in S} \vec{\Gamma}(M/R_g) dm \right\} \left\{ \vec{\Omega}(S/R_g) \right\} \\ &= \int_{M \in S} \vec{AM} \wedge \vec{\Gamma}(M/R_g) dm \Big|_A \left\{ \vec{V}(A/R_g) \right\}. \end{aligned}$$

Ce produit de deux torseurs vaut :

$$\vec{V}(A/R_g) \cdot \int_{M \in S} \vec{\Gamma}(M/R_g) dm + \vec{\Omega}(S/R_g) \cdot \int_{M \in S} \vec{AM} \wedge \vec{\Gamma}(M/R_g) dm.$$

En remplaçant

$$\vec{V}(A/R_g) \text{ par } \vec{V}(M/R_g) + \vec{\Omega}(S/R_g) \wedge \vec{MA},$$

après l'avoir introduit sous le signe somme, l'expression précédente se simplifie pour se mettre sous la forme :

$$\int_{M \in S} \vec{\Gamma}(M/R_g) \cdot \vec{V}(M/R_g) dm.$$

De plus, comme

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}(M/R_g) \cdot \vec{V}(M/R_g) &= \left[\frac{d}{dt} \vec{V}(M/R_g) \right]_{R_g} \cdot \vec{V}(M/R_g) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\vec{V}(M/R_g)]^2. \end{aligned}$$

On peut écrire que :

$$\begin{aligned} & \int_{M \in S} \vec{\Gamma}(M/R_g) \cdot \vec{V}(M/R_g) dm \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int [\vec{V}(M/R_g)]^2 dm \right]. \end{aligned}$$

Ce qui fait apparaître l'énergie cinétique de (S) dans son mouvement par rapport à R_g : $T(S/R_g)$, d'où :

$$\int_{M \in S} \vec{\Gamma}(M/R_g) \cdot \vec{V}(M/R_g) dm = \frac{d}{dt} T(S/R_g).$$

$T(S/R_g)$ est appelée *énergie cinétique galiléenne* de (S) .

Par suite, le théorème de l'énergie cinétique s'écrit pour un solide :

$$\frac{d}{dt} T(S/R_g) = P(\bar{S} \rightarrow S/R_g).$$

Théorème qui s'énonce ainsi :

La dérivée, par rapport à la date t , de l'énergie cinétique galiléenne d'un solide (S) est égale à la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à (S) .

4.2. POUR UN ENSEMBLE DE SOLIDES

Soit un ensemble (E) de n solides $(S_1), (S_2), \dots, (S_n)$ en mouvement par rapport à un repère galiléen

Dynamique

R_g . Pour un solide (S_i) de (E) le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\frac{d}{dt} T(S_i/R_g) = P(\bar{S}_i \rightarrow S_i/R_g)$$

ajoutons membre à membre les n relations analogues à celle-ci, écrites pour les n solides. On obtient :

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^n T(S_i/R_g) \right] = \sum_{i=1}^n P(\bar{S}_i \rightarrow S_i/R_g)$$

le membre de gauche représente la dérivée, par rapport à la date t , de l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble (E) de solides, notée : $\frac{d}{dt} T(E/R_g)$. Le

membre de droite représente la somme des puissances galiléennes des actions mécaniques extérieures à chaque solide de (E), ou si l'on veut, la somme de la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à (E) et des puissances des actions mutuelles entre chaque solide de (E), c'est-à-dire :

$$P(\bar{E} \rightarrow E/R_g) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n P(S_i \leftrightarrow S_j).$$

Par suite le théorème de l'énergie cinétique s'écrit pour un ensemble de solides :

$$\frac{d}{dt} T(E/R_g) = P(\bar{E} \rightarrow E/R_g) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n P(S_i \leftrightarrow S_j).$$

Théorème qui s'énonce ainsi :

La dérivée, par rapport à la date t , de l'énergie cinétique galiléenne d'un ensemble (E) de solides, est égale à la somme de la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à (E) et des puissances des actions mutuelles entre chaque solide de (E).

REMARQUES

— Le théorème de l'énergie cinétique n'est valable qu'à condition de tenir compte dans le calcul de la puissance, des actions mutuelles entre les solides de (E), donc intérieures à (E). Il y a là une différence essentielle avec le principe fondamental de la dynamique.

— Vu la construction du théorème de l'énergie cinétique, l'équation obtenue n'est pas indépendante des équations scalaires fournies par le principe fondamental de la dynamique. Par contre, elle se substitue souvent avantageusement à l'une d'entre elles.

— L'application du principe fondamental de la dynamique donne six équations scalaires indépendantes et l'application du théorème de l'énergie cinétique n'en donne qu'une. Par conséquent, l'application du théorème de l'énergie cinétique est généralement insuffisante, à elle seule, pour résoudre un problème de dynamique.

256

Les équations de Lagrange, qui constituent une autre traduction énergétique du principe fondamental de la dynamique pour un ensemble de solides, sont complètement équivalentes aux équations obtenues par le principe fondamental. — Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit également en faisant intervenir le travail des actions mécaniques entre deux dates t_1 et t_2

$$T_{t_2}(E/R_g) - T_{t_1}(E/R_g) = W_{t_1}^{t_2}(\bar{E} \rightarrow E/R_g) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n W_{t_1}^{t_2}(S_i \leftrightarrow S_j)$$

C'est sous cette forme, en supposant les liaisons parfaites entre les différents solides de (E), que ce théorème a été vu en classe de terminale

4.3. INTÉGRALE PREMIÈRE DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE

Lorsque les puissances intervenant dans le théorème de l'énergie cinétique sont nulles ou dérivent d'une énergie potentielle (au signe près), dont on notera la somme $V(E/R_g)$, ce théorème s'écrit :

$$\frac{d}{dt} T(E/R_g) = -\frac{d}{dt} V(E/R_g).$$

Par conséquent, il existe une intégrale première du mouvement, appelée *intégrale première de l'énergie cinétique* :

$$T(E/R_g) + V(E/R_g) = C$$

où C est une constante déterminée en fonction des conditions initiales du mouvement.

Par définition, l'énergie mécanique de (E) est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle (par rapport à R_g). L'intégrale première de l'énergie cinétique traduit la conservation de l'énergie mécanique de (E).

REMARQUE

Le théorème de l'énergie cinétique mesure les transferts d'énergie et des transformations d'énergie en puissance (ou en travail), inversement.

4.4. UNITÉS

Le théorème de l'énergie cinétique montre que l'énergie cinétique et l'énergie potentielle sont homogènes à un travail. De plus, comme elles proviennent du travail et se transforment en travail, il est donc naturel de les exprimer en unité de travail, c'est-à-dire en joules.

4.5. APPLICATION 1 : PENDULE SIMPLE

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère galiléen lié à un bâti (Σ). On désigne par $\vec{g} = g\vec{x}$ l'accélération de la pesanteur.

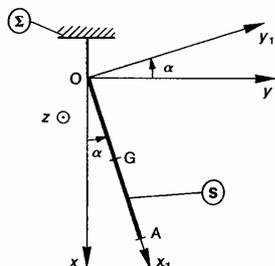


Fig. 7

Le pendule (S) est constitué par une tige OA de longueur l , homogène, de masse m et de centre d'inertie G. (S) oscille dans le plan (O, \vec{x}, \vec{y}) . La liaison pivot d'axe (O, \vec{z}) entre (Σ) et (S) est parfaite.

Soit $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ un repère lié à (S) tel que $\vec{OA} = l\vec{x}_1$. On pose : $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_1)$.

QUESTION

Déterminer l'intégrale première de l'énergie cinétique du mouvement de (S) par rapport à R, sachant qu'à la date $t=0$: $\alpha(0) = \alpha_0$ et $\alpha'(0) = 0$.

REPONSE

Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à (S) dans son mouvement par rapport au repère galiléen R, s'écrit :

$$\frac{d}{dt} T(S/R) = P(\vec{S} \rightarrow S/R).$$

L'énergie cinétique de (S) dans son mouvement par rapport à R a été calculée au paragraphe 6 du chapitre 1 de dynamique.

Elle vaut :

$$T(S/R) = \frac{ml^2}{6} \alpha'^2. \quad (4)$$

(\vec{S}), l'extérieur de (S), est constitué du bâti (Σ) et de la pesanteur. Par conséquent :

$$P(\vec{S} \rightarrow S/R) = P(\Sigma \rightarrow S/R) + P(g \rightarrow S/R).$$

La liaison entre (Σ) et (S) est parfaite. Alors :

$$P(\Sigma \leftrightarrow S) = 0.$$

Comme le repère R est lié à (Σ) :

$$P(\Sigma \leftrightarrow S) = P(\Sigma \rightarrow S/R).$$

Par suite :

$$P(\Sigma \rightarrow S/R) = 0.$$

La puissance de l'action mécanique de la pesanteur sur (S), dans son mouvement par rapport au repère R lié à la terre, dérive (au signe près) de l'énergie potentielle :

$$V(g \rightarrow S/R) = -mgx_G \quad (5)$$

comme :

$$x_G = \vec{x} \cdot \vec{OG} = \frac{l}{2} \cos \alpha$$

$$V(g \rightarrow S/R) = -mg \frac{l}{2} \cos \alpha. \quad (6)$$

La relation (5) a été obtenue en effectuant le changement de coordonnées : $z_G = -x_G + \text{constante}$, dans l'expression de l'énergie potentielle de la pesanteur établie au paragraphe 3.1, valable pour un axe vertical ascendant. La constante, inutile, n'a pas été écrite. Finalement, seul un changement de signe est à effectuer lorsque l'axe est vertical descendant.

Par suite le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\frac{d}{dt} T(S/R) = -\frac{d}{dt} V(g \rightarrow S/R)$$

d'où l'intégrale première :

$$T(S/R) + V(g \rightarrow S/R) = C.$$

Soit, compte tenu des relations (4) et (6) :

$$\frac{ml^2}{6} \alpha'^2 - mg \frac{l}{2} \cos \alpha = C$$

ou encore :

$$\alpha'^2 - 3 \frac{g}{l} \cos \alpha = D. \quad (7)$$

D étant une constante, qui avec les conditions initiales proposées vaut : $-3 \frac{g}{l} \cos \alpha_0$.

L'intégrale première de l'énergie cinétique s'écrit donc :

$$\alpha'^2 = 3 \frac{g}{l} (\cos \alpha - \cos \alpha_0).$$

REMARQUES

— Pour retrouver l'équation obtenue par l'application du principe fondamental de la dynamique, il suffit de dériver par rapport à la date t , la relation (7) :

$$2\alpha' \alpha'' + 3 \frac{g}{l} \alpha' \sin \alpha = 0.$$

Soit en supposant $\alpha' \neq 0$:

$$\alpha'' + \frac{3g}{2l} \sin \alpha = 0.$$

— Lors de son oscillation le pendule transforme son énergie potentielle en énergie cinétique, et inversement. Ces énergies augmentent ou diminuent, uniquement lorsqu'une puissance est développée.

— Le pendule n'oscille pas indéfiniment à cause du frottement dans la liaison pivot et de la résistance de l'air. L'énergie mécanique du pendule se transforme petit à petit en énergie thermique et cela jusqu'à l'arrêt.

— Les transformations mutuelles des différentes formes d'énergie à l'intérieur d'un système isolé conduisent toujours à une augmentation de l'énergie thermique aux dépens des autres formes d'énergie. Or les transformations de l'énergie thermique en d'autres formes d'énergie sont toujours beaucoup plus difficiles et incomplètes que les transformations inverses. C'est pourquoi l'on dit que l'énergie se dégrade en changeant de forme.

4.6. APPLICATION 2 : RÉDUCTEUR A TRAIN ÉPICYCLOÏDAL

Le schéma de principe d'un réducteur à train épicycloïdal à axes parallèles est représenté figure 8.

$R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est un repère galiléen lié au bâti (S_0) du réducteur.

L'ensemble (S_1) , constitué par l'arbre moteur et la roue dentée de n_1 dents qui lui est liée, a une liaison pivot d'axe (O, \vec{x}_0) avec (S_0) .

Soit I_1 le moment d'inertie de (S_1) par rapport à l'axe (O, \vec{x}_0) . On pose : $\tilde{\Omega}(S_1/R_0) = \omega_1 \vec{x}_0$. L'arbre récepteur (S_2) a une liaison pivot d'axe (O, \vec{x}_0) avec (S_0) .

Soit I_2 le moment d'inertie de (S_2) par rapport à l'axe (O, \vec{x}_0) . On pose : $\tilde{\Omega}(S_2/R_0) = \omega_2 \vec{x}_0$. Le repère $R(O, \vec{x}_0, \vec{y}, \vec{z})$ est lié à (S_2) .

Le satellite (S) de n dents, a une liaison pivot d'axe (A, \vec{x}_0) avec (S_2) , telle que $\vec{OA} = d\vec{y}$ ($d > 0$). Soient m la masse de (S) et I son moment d'inertie par rapport à l'axe (A, \vec{x}_0) . Le point A est le centre d'inertie de (S) . On pose : $\tilde{\Omega}(S/R_0) = \omega \vec{x}_0$.

(S) engrène avec une couronne de n_0 dents d'axe (O, \vec{x}_0) , liée à (S_0) .

Le moteur exerce sur (S_1) une action mécanique représentée par un couple de moment $C_1 \vec{x}_0$. Le récepteur exerce sur (S_2) une action mécanique représentée par le couple de moment $-C_2 \vec{x}_0$. Toutes les liaisons sont parfaites, l'action mécanique de la pesanteur est négligée.

On pose $\lambda = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ et $\mu = \frac{\omega}{\omega_1}$

(On montre que : $\lambda = \frac{n_1}{n_0 + n_1}$ et $\mu = -\frac{n_1}{2n}$)

QUESTION 1

Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble (E) des 3 solides (S_1) , (S_2) et (S) dans leur mouvement par rapport à R_0 .

REPONSE

Par définition :

$$2T(E/R_0) = 2T(S_1/R_0) + 2T(S_2/R_0) + 2T(S/R_0).$$

Calculons l'énergie cinétique de chaque solide. Pour ce appliquons les relations du paragraphe 14 du chapitre de dynamique. On obtient :

$$2T(S_1/R_0) = I_1 \omega_1^2$$

de même :

$$2T(S_2/R_0) = I_2 \omega_2^2$$

et

$$2T(S/R_0) = m [\vec{V}(A/R_0)]^2 + I \omega^2$$

soit

$$2T(S/R_0) = md^2 \omega_2^2 + I \omega^2.$$

En ajoutant ces trois résultats, l'énergie cinétique de (E) dans son mouvement par rapport à R_0 s'écrit :

$$2T(E/R_0) = I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + md^2 \omega_2^2 + I \omega^2.$$

Soit, en exprimant ω_2 et ω en fonction de ω_1 :

$$2T(E/R_0) = I_1 \omega_1^2 + (I_2 + md^2) \lambda^2 \omega_1^2 + I \mu^2 \omega_1^2$$

ou :

$$2T(E/R_0) = [I_1 + (I_2 + md^2) \lambda^2 + I \mu^2] \omega_1^2$$

Posons :

$$I_e = I_1 + (I_2 + md^2) \lambda^2 + I \mu^2$$

I_e est appelée *inertie équivalente* de la chaîne cinématique rapportée à l'arbre moteur.

Alors :

$$2T(E/R_0) = I_e \omega_1^2$$

QUESTION 2

Quelle équation obtient-on en appliquant le théorème l'énergie cinétique à (E) dans son mouvement par rapport à R_0 ?

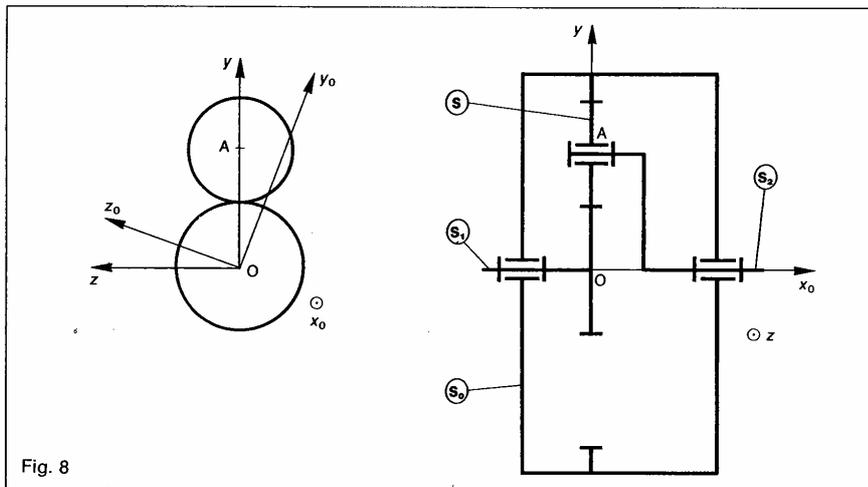


Fig. 8

REPONSE

L'équation traduisant le théorème de l'énergie cinétique appliqué à (E) dans son mouvement par rapport à R_0 s'écrit :

$$\frac{d}{dt} T(E/R_0) = P(\bar{E} \rightarrow E/R_0) + P(S_1 \leftrightarrow S) + P(S \leftrightarrow S_2)$$

Les deux puissances d'actions mutuelles $P(S_1 \leftrightarrow S)$ et $P(S \leftrightarrow S_2)$ sont nulles, les liaisons étant parfaites. La puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à (E), exercées par le bâti (S_0), le moteur et le récepteur, s'écrit :

$$P(\bar{E} \rightarrow E/R_0) = P(S_0 \rightarrow S_1/R_0) + P(S_0 \rightarrow S/R_0) + P(\text{moteur} \rightarrow S_1/R_0) + P(\text{récepteur} \rightarrow S_2/R_0)$$

Les trois premières puissances sont nulles car les liaisons sont parfaites et R_0 est lié à (S_0). Calculons les deux autres puissances :

$$P(\text{moteur} \rightarrow S_1/R_0) = \{ \vec{c}(\text{moteur} \rightarrow S_1) \} \cdot \{ \mathcal{V}(S_1/R_0) \} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_1 \vec{x}_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 \vec{x}_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1 \omega_1$$

de la même façon :

$$P(\text{récepteur} \rightarrow S_2/R_0) = -C_2 \omega_2$$

Alors :

$$P(\bar{E} \rightarrow E/R_0) = C_1 \omega_1 - C_2 \omega_2$$

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit donc :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I_e \omega^2 \right) = C_1 \omega_1 - C_2 \omega_2$$

Soit après dérivation :

$$I_e \omega_1 \frac{d\omega_1}{dt} = C_1 \omega_1 - C_2 \omega_2$$

Après avoir remplacé ω_2 par $\lambda \omega_1$ et simplifié l'expression par ω_1 (supposé différent de 0), on obtient finalement :

$$I_e \frac{d\omega_1}{dt} = C_1 - \lambda C_2$$

REMARQUE

Le théorème de l'énergie cinétique est bien adapté pour une approche globale d'un mécanisme à un degré de mobilité.

A SAVOIR

1. La puissance développée par l'action mécanique d'un ensemble matériel (Σ) sur un solide (S) dans le mouvement de (S) par rapport à un repère R s'écrit :

$$P(\Sigma \rightarrow S/R) = \{ \vec{c}(\Sigma \rightarrow S) \} \cdot \{ \mathcal{V}(S/R) \}$$

La puissance développée par les actions mutuelles entre deux ensembles matériels est indépendante du repère choisi pour la calculer.

Deux solides (S_1) et (S_2) ont une liaison parfaite quel que soit le mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) autorisée par la liaison : la puissance développée par les actions mutuelles entre (S_1) et (S_2) est nulle. Soit $P(S_1 \leftrightarrow S_2) = 0$.

4. Le travail entre les dates t_1 et t_2 de l'action mécanique de l'ensemble matériel (Σ) sur l'ensemble matériel (E) dans le mouvement de (E) par rapport au repère R est :

$$W(\Sigma \rightarrow E/R) = \int_{t_1}^{t_2} P(\Sigma \rightarrow E/R) dt$$

5. L'ensemble matériel (E) possède une énergie potentielle associée à l'action mécanique d'un ensemble matériel (Σ) sur (E) dans le mouvement de (E) par rapport à un repère R si il existe une fonction scalaire $V(\Sigma \rightarrow E/R)$ telle que :

$$P(\Sigma \rightarrow E/R) = \frac{d}{dt} V(\Sigma \rightarrow E/R)$$

6. L'énergie potentielle de la pesanteur d'un ensemble matériel (E) de masse m et de centre d'inertie C :

$$V(g \rightarrow E/R) = m g z_C$$

Sachant que

$R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est un repère lié à la terre, l'axe (O, \vec{z}) étant dirigé suivant la verticale ascendante, z représente l'abscisse sur (O, \vec{z}) du centre d'inertie G.

7. L'énergie potentielle de deux solides entre lesquels est intercalé un ressort de traction d'impulsion de masse nulle :

$$V(r \rightarrow S_1, S_2) = \frac{K}{2} (l - l_0)^2$$

8. Théorème de l'énergie cinétique pour un ensemble de solides :

La dérivée par rapport à la date t de l'énergie cinétique galiléenne d'un ensemble (E) de solides est égale à la somme de la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à (E) et des puissances des actions mutuelles entre chaque solide de (E) :

$$\frac{d}{dt} T(E/R_0) = P(\bar{E} \rightarrow E/R_0) + \sum P(S_i \leftrightarrow S_j)$$

Ce théorème s'écrit également en faisant intervenir le travail des actions mécaniques entre deux dates t_1 et t_2 :

$$T(E/R_0) - T_1(E/R_0) = W_1(\bar{E} \rightarrow E/R_0) + \sum W_1(S_i \leftrightarrow S_j)$$

PROBLÈME RÉSOLU

La figure 9 représente un démarreur manuel pour moteur Diesel.

$R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est un repère galiléen lié au carter du démarreur, ainsi qu'au bâti du moteur.

La vis (7) a une liaison pivot d'axe (O, \vec{x}) avec le carter du démarreur, et l'écrou (9) possède une liaison glissière avec l'arbre creux (6). Une roue à rochet (12) liée au pignon conique (36) interdit la rotation $(-R_y)$ de (36).

Une roue à rochet débrayable (12) liée à (17) interdit ou autorise (si débrayée) la rotation $(-R_x)$ du pignon (17).

Le lancement du moteur s'effectue en cinq phases :

Première phase : Encliquetage de la roue à rochet (12), d'où suppression de la rotation $(-R_x)$ de (17).

Deuxième phase : Rotation $(+R_y)$ de (36) qui entraîne la rotation $(-R_x)$ de (6), (9) et (7). La rotation $(-R_x)$ de (7) entraîne la translation $(+T_x)$ de (17) jusqu'à compression totale du ressort (14).

Le pignon (17) engrène avec la couronne de démarreur du moteur et la vis (7) est bloquée.

Troisième phase : La vis (7) étant immobilisée, la poursuite de la rotation $(-R_x)$ de (9) entraîne sa translation $(-T_x)$ (course $d=40$ mm) et la compression des rondelles Belleville (5).

Quatrième phase : La rotation d'un quart de tour de l'excentrique (27) permet le débrayage de la roue à rochet (12), d'où rotation $(-R_x)$ du pignon (17).

Sous l'action des rondelles (5), la translation $(+T_x)$ de l'écrou (9), provoque la rotation $(-R_x)$ de la vis (7). Le système vis (7)-écrou (9) est rendu réversible grâce au faible coefficient de frottement de la liaison hélicoïdale à billes, de pas $p=10$ mm. La rotation de (7) entraîne celle de (17) et de la couronne de démarreur du moteur Diesel.

Cinquième phase : Le moteur une fois lancé, provoque le renvoi du pignon (17) à sa position initiale, grâce à la rampe hélicoïdale de la vis (7) et au ressort (14).

Le schéma de la figure 9 représente la situation du démarreur entre la troisième phase et la quatrième phase. Le but de l'étude est de déterminer, après lancement, la vitesse de rotation de vilebrequin (V) du moteur, dont l'axe de rotation est parallèle à (O, \vec{x}) .

On note :

x : le déplacement de l'écrou (9) par rapport à sa position initiale (rondelles comprimées).

θ : l'angle qui définit la position angulaire de la vis (7) par rapport à R , tel que $\theta=0$ lorsque $x=0$.

φ : l'angle qui définit la position angulaire du vilebrequin (V) par rapport à R , tel que $\varphi=0$ lorsque $\theta=0$.

λ : le rapport de réduction de l'engrenage constitué par le pignon (17) et la couronne du démarreur.

I : le moment d'inertie de la vis (7) par rapport à son axe de rotation (pièces entraînées en rotation comprises).

J : le moment d'inertie du vilebrequin (V) par rapport à son axe de rotation (pièces entraînées en rotation comprises).

m : la masse de l'écrou (9).

K : la raideur de l'ensemble des rondelles Belleville.

C_0 : le moment du couple résistant exercé par le moteur (M) sur le vilebrequin (V).

On donne :

$$\lambda = \frac{1}{10}; \quad I = 6 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2; \quad J = 4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2;$$

$$m = 1,65 \text{ kg}; \quad K = 95 \text{ daN/mm}; \quad C_0 = 26 \text{ m} \cdot \text{daN}.$$

Toutes les liaisons sont parfaites. L'action mécanique de la pesanteur est négligée.

QUESTION 1

Quelle relation y a-t-il entre la position x de l'écrou (9) et la position angulaire θ de la vis (7)?

RÉPONSE

La vis tournant dans le sens $(-R_x)$, $\theta = -8\pi$ lorsque $x=40$ mm (la course de l'écrou est de 40 millimètres et le pas de la liaison glissière hélicoïdale est $p=10$ millimètres).

Le pas réduit de la liaison glissière hélicoïdale est $\frac{p}{2\pi}$. Par conséquent, x et θ sont liés par la relation :

$$x = -\frac{p}{2\pi} \theta.$$

QUESTION 2

Quelle relation y a-t-il entre la position angulaire θ de la vis (7) et la position angulaire φ du vilebrequin (V)?

RÉPONSE

L'engrenage constitué par le pignon (17) et la couronne du démarreur étant à contact extérieur :

$$\varphi = -\lambda \theta.$$

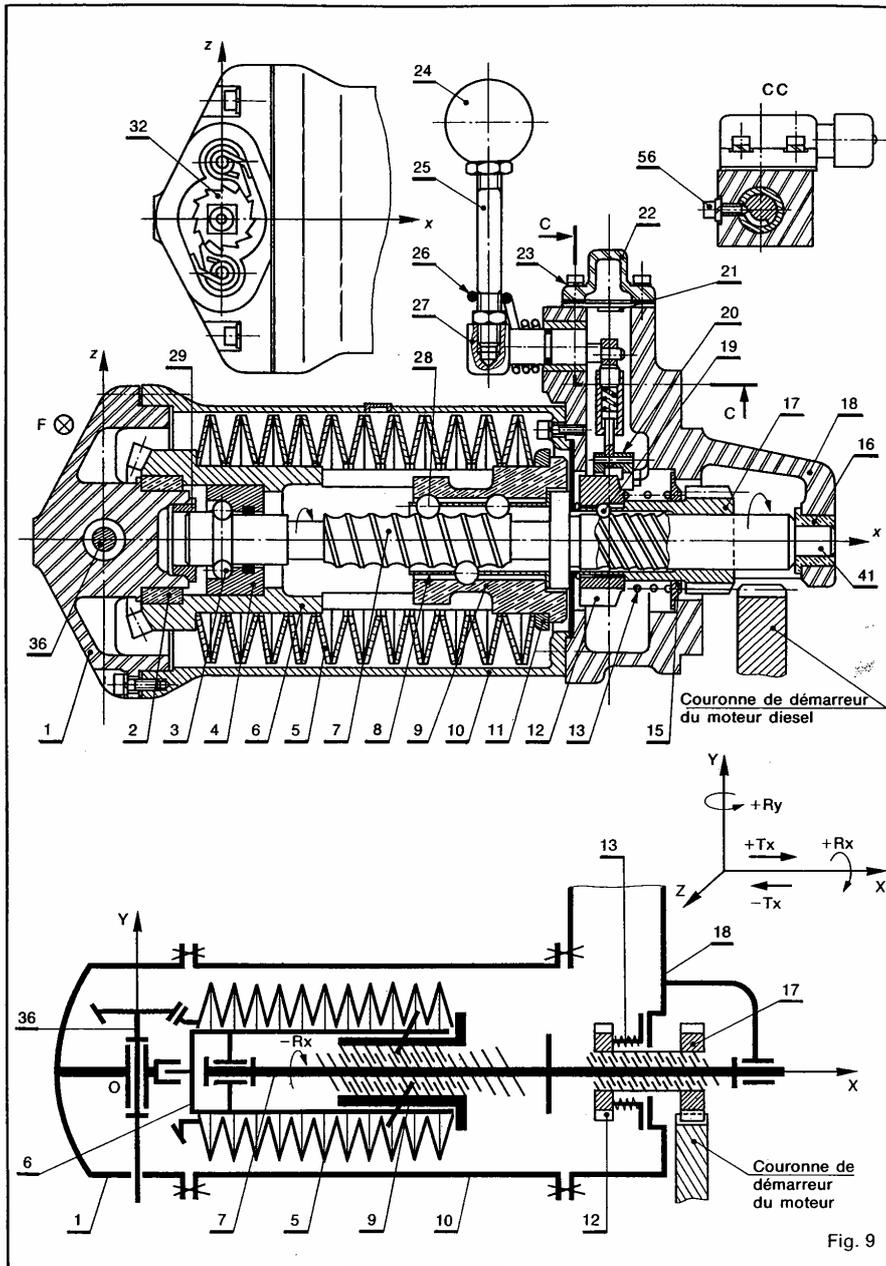


Fig. 9

QUESTION 3

Déterminer l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble (E) constitué par l'écrou (9), la vis (7) et le vilebrequin (V).

RÉPONSE

L'énergie cinétique de (E) dans son mouvement par rapport à R est égale à :

$$T(E/R) = T(9/R) + T(7/R) + T(V/R)$$

l'énergie cinétique de l'écrou (9) est

$$T(9/R) = \frac{1}{2} m x'^2,$$

soit, avec $x' = -\frac{p}{2\pi} \theta'$, $T(9/R) = \frac{1}{2} m \frac{p^2}{4\pi^2} \theta'^2$

l'énergie cinétique de la vis (7) est

$$T(7/R) = \frac{1}{2} I \theta'^2$$

l'énergie cinétique du vilebrequin (V) est

$$T(V/R) = \frac{1}{2} J \varphi'^2$$

soit, avec $\varphi' = -\lambda \theta'$, $T(V/R) = \frac{1}{2} J \lambda^2 \theta'^2$.

Par suite l'énergie cinétique de (E) vaut :

$$T(E/R) = \frac{1}{2} \left(m \frac{p^2}{4\pi^2} + I + \lambda^2 J \right) \theta'^2.$$

QUESTION 4

Déterminer l'énergie potentielle de l'écrou (9) associée à l'action mécanique du ressort constitué par les rondelles Belleville (5), supposées de masse nulle.

RÉPONSE

L'action mécanique des rondelles sur l'écrou est représentable par la force (O, F) telle que :

$$\vec{F} = K(d-x)\vec{x}.$$

Le vecteur vitesse de translation de l'écrou par rapport à R est $x'\vec{x}$.

Par suite, la puissance développée par l'action mécanique des rondelles sur l'écrou, dans son mouvement par rapport à R, est :

$$P(5 \rightarrow 9/R) = K(d-x)x'$$

puissance qui dérive (au signe près) de l'énergie potentielle :

$$V(5 \rightarrow 9/R) = \frac{1}{2} K(d-x)^2.$$

QUESTION 5

Déterminer la puissance développée par l'action mécanique du moteur (M) sur le vilebrequin (V), dans son mouvement par rapport à R.

RÉPONSE

Le moment du couple résistant exercé par le moteur (M) sur le vilebrequin (V) est $-C_0 \vec{x}$ la vitesse de rotation du vilebrequin est φ' comme $\varphi' = -\lambda \theta'$, la puissance cherchée est égale à :

$$P(M \rightarrow V/R) = \lambda C_0 \theta'.$$

QUESTION 6

Quelle équation obtient-on en appliquant le théorème de l'énergie cinétique à (E) dans son mouvement par rapport à R?

En déduire la vitesse de rotation de la vis du démarreur, à la fin du lancement.

RÉPONSE

L'équation traduisant le théorème de l'énergie cinétique appliqué à (E) dans son mouvement par rapport à R s'écrit :

$$\frac{d}{dt} T(E/R) = P(5 \rightarrow 9/R) + P(M \rightarrow V/R).$$

Soit, compte tenu des résultats précédents :

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \left(m \frac{p^2}{4\pi^2} + I + \lambda^2 J \right) \theta'^2 \right] = - \left[\frac{d}{dt} \frac{K}{2} (d-x)^2 \right] + \lambda C_0 \theta'.$$

Ou bien, en exprimant la variation de l'énergie cinétique galiléenne de (E) entre deux dates t_1 et t_2 , en remarquant au préalable que $d\theta = \theta' dt$

$$\frac{1}{2} \left(m \frac{p^2}{4\pi^2} + I + \lambda^2 J \right) [\theta'^2]_{t_1}^{t_2} = - \frac{K}{2} [(d-x)^2]_{t_1}^{t_2} + \lambda C_0 [\theta]_{t_1}^{t_2}$$

si la date t_1 est celle du début du lancement :

$$\theta(t_1) = 0, \quad \theta'(t_1) = 0 \quad \text{et} \quad x(t_1) = 0$$

si la date t_2 est celle de la fin du lancement :

$$\theta(t_2) = -8\pi, \quad \theta'(t_2) = \theta'_f \text{ (inconnue)} \quad \text{et} \quad x(t_2) = d$$

la relation s'écrit :

$$\frac{1}{2} \left(m \frac{p^2}{4\pi^2} + I + \lambda^2 J \right) \theta_f'^2 = \frac{Kd^2}{2} - \lambda C_0 \times 8\pi$$

d'où

$$\theta_f'^2 = \frac{\frac{Kd^2}{2} - \lambda C_0 \times 8\pi}{\frac{1}{2} \left(m \frac{p^2}{4\pi^2} + I + \lambda^2 J \right)}$$

Avec les valeurs numériques proposées :

$$\theta_f' = 73,09 \text{ rad/s (698 tr/min)}$$

le vilebrequin du moteur sera donc lancé à la vitesse de rotation de 69,8 tr/min.

CONSEILS POUR LA RESOLUTION

1. Ne pas oublier le signe moins dans la définition de l'énergie potentielle.

$$W(P) = -F(R) = -\int_A^B V(z) dz = -F(R)$$

2. Lorsque deux solides (S₁) et (S₂) ont une liaison parfaite, $F(C) = -F(S) = 0$. Mais la puissance $P(C) = -F(S, R)$ est généralement pas nulle, car si le repère R est fixe.

3. La conservation de l'énergie potentielle de la pesanteur stable dans le cours est valable uniquement pour un axe vertical ascendant. Si l'axe

vertical est descendant cette expression change de signe.

4. Au chapitre 1 de dynamique figurent des expressions indiquant le double de l'énergie cinétique d'un solide. Ne pas oublier la présence de ce coefficient deux en écrivant le théorème de l'énergie cinétique.

5. L'écriture de théorème de l'énergie cinétique sous la forme faisant intervenir le travail des actions mécaniques est souvent très pratique dans les applications.

EXERCICES AVEC RÉPONSES

1 — La figure 10 représente un extracteur à inertie utilisé pour le démontage des moyeux de roues sur véhicules utilitaires.

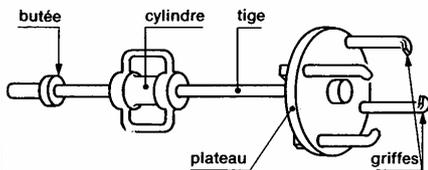


Fig. 10

Il est constitué d'une tige sur laquelle coulisse un cylindre de masse $m_1 = 2$ kg. A l'une des extrémités de cette tige est fixé un plateau muni de 4 griffes destinées à saisir le moyeu. A l'autre extrémité, une butée limite la course du cylindre. Celui-ci, entraîné par l'opérateur à une vitesse supposée uniforme $v_1 = 5$ m/s, vient frapper la butée, permettant ainsi l'extraction du moyeu après plusieurs aller-retour.

La masse des éléments autres que le cylindre est $m_2 = 3$ kg.

QUESTIONS

1. Déterminer la vitesse v_2 de la tige de l'extracteur après le choc du cylindre sur la butée, sachant que v_2 est donnée par la relation :

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2.$$

2. En supposant qu'après le choc, le cylindre reste en contact avec la butée, déterminer la composante axiale des actions de serrage des roulements sur le moyeu, lorsque celui-ci se déplace à chaque frappe de 0,4 mm.

RÉPONSES

- $v_2 = 2$ m/s.
- $F = 2500$ daN.

2 — La figure 11 représente le dessin d'un dispositif de marquage automatique de pièces.

Lorsque le doigt (9) arrive en face du dégagement de la came (8), le marteau (1) de masse $m_1 = 0,3$ kg chute et frappe le porte-chiffres (2) de masse $m_2 = 0,1$ kg. (1) et (2) restent solidaires dans la phase suivante, à la fin de laquelle les chiffres sont marqués dans la pièce (10). La came remonte le marteau (1), le porte-chiffres (2) est relevé sous l'action du ressort (4) de raideur $K_4 = 1$ N/mm. Celui-ci retrouve approximativement sa longueur libre quand le porte-chiffres est à 4 mm de la pièce. Le ressort (3) a pour raideur $K_3 = 5$ N/mm. Il retrouve sa longueur libre quand le porte-chiffres (2) entre en contact avec la pièce (10). En position haute du marteau, 3 mm sépare celui-ci du porte-chiffres (2). Soit $\|\vec{g}\| = 10$ m/s² l'accélération de la pesanteur.

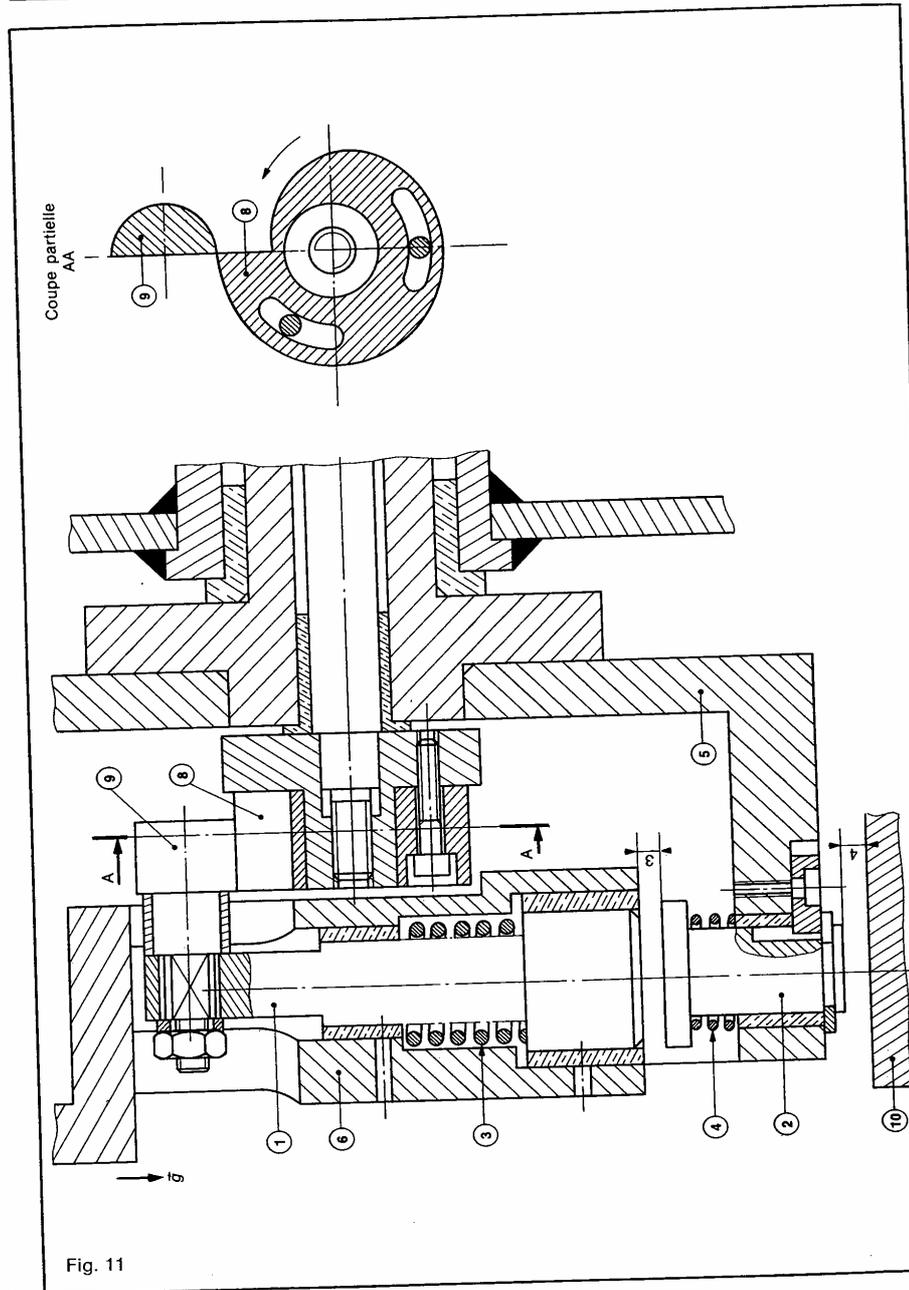
QUESTIONS

1° Déterminer la vitesse v_1 du marteau (1) quand il arrive en contact avec le porte-chiffres (2).

2° Déterminer la vitesse v_2 de l'ensemble {(1), (2)} après le choc entre (1) et (2), sachant que v_2 vérifie la relation :

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2.$$

3° Déterminer l'énergie disponible quand le porte-chiffres (2) entre en contact avec la pièce (10).



RÉPONSES

- 1° $v_1 = 0,780$ m/s.
- 2° $v_2 = 0,585$ m/s.
- 3° $E = 0,116$ J.

3 — La figure 12 représente le schéma d'un vérin à double effet.

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère galiléen lié au corps (S_0) du vérin. L'axe (O, \vec{x}) est placé suivant l'axe du vérin et l'axe (O, \vec{y}) est dirigé suivant la verticale ascendante.

On désigne par $\vec{g} = -g\vec{y}$ l'accélération de la pesanteur. La tige (S), de centre de gravité G, de masse m , est supportée par (S_0) en deux liaisons, qui peuvent être schématisées par deux liaisons ponctuelles avec frottement (coefficient de frottement f) aux points A et B situés sur l'axe (O, \vec{x}) .

On pose :

$$\begin{aligned} \vec{OB} &= 2l\vec{x} \quad (l : \text{constante positive}) \\ \vec{OA} &= x\vec{x} \quad \text{avec } 0 \leq x \leq 1,8l \\ \vec{AG} &= l\vec{x} \end{aligned}$$

Les actions mécaniques de (S_0) sur (S) dans ces deux liaisons ponctuelles en A et B sont caractérisées respectivement par les deux forces (A, \vec{R}_A) et (B, \vec{R}_B) .

On pose :

$$\begin{aligned} \vec{R}_A &= X_A\vec{x} + Y_A\vec{y} \\ \vec{R}_B &= X_B\vec{x} + Y_B\vec{y}. \end{aligned}$$

On exerce également sur la tige une action mécanique caractérisée par la force $(A, -F\vec{x})$, avec $F \geq 0$. Le but de l'étude est de déterminer la vitesse en fin de course de la tige (S) par rapport au corps (S_0) .

QUESTIONS

- 1° Écrire les trois équations scalaires déduites du principe fondamental de la dynamique appliqué à la tige (S) dans son mouvement par rapport à R.
- 2° Déterminer Y_A et Y_B .
- 3° En déduire X_A et X_B dans les deux cas suivants :
 - a) $0 \leq x \leq l$
 - b) $l \leq x \leq 1,8l$

4° Pour une évolution quasi statique de la tige (S), déterminer les expressions de F dans les deux cas précédents.

Tracer le graphe de F en fonction de x. Préciser les coordonnées des points remarquables.

5° On suppose maintenant que

$$F = Cte = F_0 > 9fmg.$$

- a) Déterminer le travail des actions mécaniques s'exerçant sur la tige (S), lorsqu'elle se déplace de la position $x = 1,8l$ à la position $x = 0$.
- b) Par application du théorème de l'énergie cinétique, déterminer la vitesse de fin de course de la tige (S) par rapport au corps (S_0) .

RÉPONSES

$$2^\circ Y_A = mg \frac{l-x}{2l-x} \begin{cases} Y_A \geq 0 \text{ si } 0 \leq x \leq l \\ Y_A \leq 0 \text{ si } l \leq x \leq 1,8l \end{cases}$$

$$Y_B = \frac{mgl}{2l-x} \quad Y_B > 0 \text{ pour } 0 \leq x \leq 1,8l.$$

3° Premier cas : $0 \leq x \leq l$

$$\begin{aligned} X_A \geq 0, \quad Y_A \geq 0 &\implies X_A = fY_A \\ X_B \geq 0, \quad Y_B > 0 &\implies X_B = fY_B. \end{aligned}$$

Deuxième cas : $l \leq x \leq 1,8l$

$$\begin{aligned} X_A \geq 0, \quad Y_A \leq 0 &\implies X_A = -fY_A \\ X_B \geq 0, \quad Y_B > 0 &\implies X_B = fY_B. \end{aligned}$$

4° Premier cas : $0 \leq x \leq l$

$$F = fmg.$$

Deuxième cas : $l \leq x \leq 1,8l$

$$F = fmg \frac{x}{2l-x}.$$

$$5^\circ a) W_{1,8l}^0(-F_0\vec{x}) = \int_{1,8l}^0 -F_0 dx = 1,8F_0l$$

$$W_{1,8l}^0(-mg\vec{y}) = 0$$

$$W_{1,8l}^0(\vec{R}_B) = \int_{1,8l}^0 fmg \frac{dx}{2l-x} = -2,3fmg l$$

$$\begin{aligned} W_{1,8l}^0(\vec{R}_A) &= - \int_{1,8l}^l fmg \frac{l-x}{2l-x} dx + \int_l^0 fmg \frac{l-x}{2l-x} dx \\ &= -0,81fmg l - 0,31fmg l \end{aligned}$$

$$W_{1,8l}^0(\vec{R}_A) = -1,12fmg l.$$

$$b) v = \sqrt{2gl \left(1,8 \frac{F_0}{mg} - 3,42f \right)}.$$

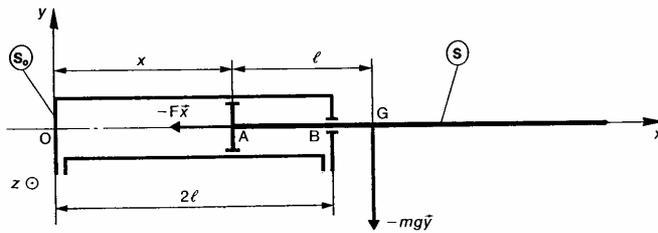


Fig. 12

4 — La figure 13 représente un dispositif conçu pour déterminer le moment d'inertie d'un solide (S) par rapport à son axe de révolution matérielle, à partir de la mesure de la période de son oscillation sur deux portées cylindriques d'un bâti (Σ).

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère galiléen lié au bâti (Σ). On désigne par $\vec{g} = g\vec{x}$ l'accélération de la pesanteur.

Les deux portées cylindriques de (Σ) sont deux éléments de la surface du cylindre de révolution d'axe (O, \vec{z}) , de rayon r .

Le solide (S) de masse m , de centre d'inertie C, possède deux tourillons de même rayon a ($a < r$).

L'étude se ramène à celle du problème plan suivant :

Le tourillon de (S), de centre C, roule sans glisser au point A sur la portée cylindrique de (Σ).

Soit $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ le repère, tel que le point C soit sur l'axe (O, \vec{x}_1) . On pose : $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_1)$.

Soit $R_2(C, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$ un repère lié à (S). On pose : $\varphi = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$. On suppose que $\varphi = 0$, lorsque $\theta = 0$.

Notons I le moment d'inertie de (S) par rapport à son axe de symétrie (C, \vec{z}) , et f le coefficient de frottement entre (S) et (Σ). On donne :

$$a = 12,5 \text{ mm}; r = 141,1 \text{ mm}; g = 9,81 \text{ m/s}^2; \\ m = 7217 \text{ g}; f = 0,15.$$

QUESTIONS

- 1° Quelle relation y a-t-il entre φ et θ ?
- 2° Quelle équation obtient-on en appliquant le théorème de l'énergie cinétique à (S) dans son mouvement par rapport à R?
- 3° En supposant que l'angle θ reste petit au cours du mouvement, déterminer la période T des oscillations de (S).
- 4° En déduire le moment d'inertie I de (S), sachant que $T = 5$ secondes.
- 5° On suppose à la date $t = 0$, que $\theta = \theta_0$ et $\theta' = 0$. Déterminer la valeur maximale de θ_0 pour que (S) roule sans glisser sur (Σ).

RÉPONSES

- 1° $r\theta = -a\varphi$.
- 2° $\frac{1}{2} \left[1 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) + m(r-a)^2 \right] \theta'^2 = mg(r-a) \cos \theta + C$
- 3° $T^2 = \frac{4\pi^2}{g} (r-a) \left(1 + \frac{I}{ma^2} \right)$
- 4° $I = 0,0534 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
- 5° $\theta_{0\text{max}} = f \left(1 + \frac{ma^2}{I} \right)$

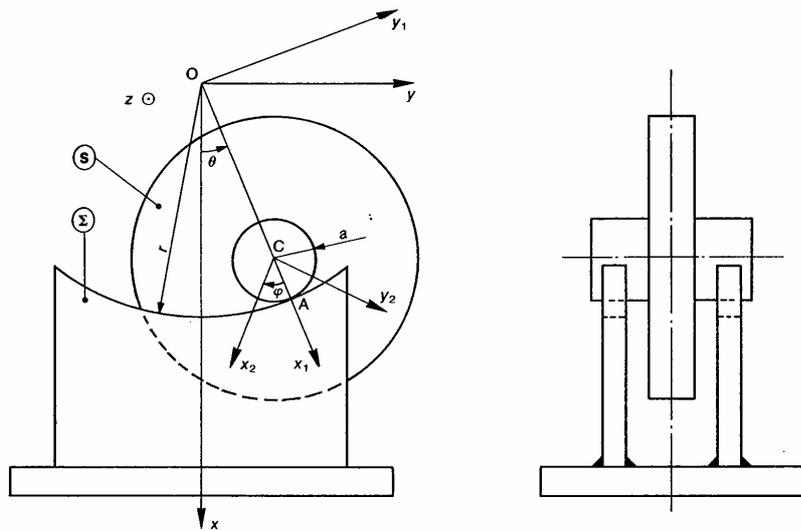


Fig. 13

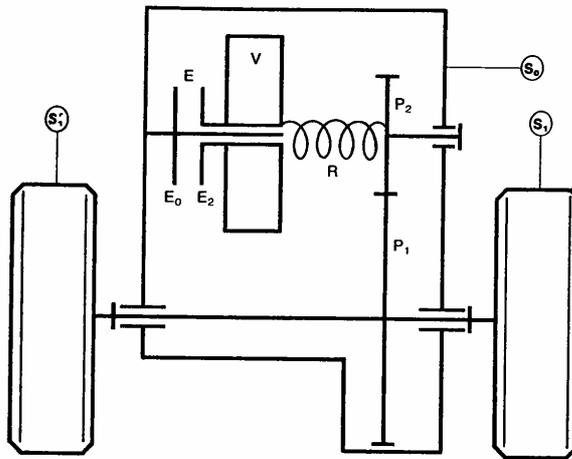


Fig. 14

5 — La figure 14 représente le schéma cinématique du mécanisme d'entraînement, d'une voiture jouet à friction.

Les roues arrière (S_1) et (S_2), de rayon $r = 2$ cm sont entraînées par un engrenage (P_1, P_2) dont le rapport de transmission est $\rho = 40$. Le pignon (P_2) est relié au volant d'inertie (V) par l'intermédiaire du ressort de torsion R . Solidaire du volant (V), le plateau (E_2), en liaison pivot glissant avec le châssis (S_0), constitue avec le plateau (E_0), lié à (S_0), un frein de couple de frottement C_f .

Le contact roue/sol est supposé ponctuel de coefficient de frottement $f = \tan \varphi = 1$. Les résistances au roulement et de pénétration dans l'air sont négligées. Toutes les liaisons sont parfaites, sauf bien entendu la liaison appui plan au niveau du frein.

Pendant la période de lancement, une action est exercée avec la main sur le châssis (S_0) de telle manière que la voiture prenne un mouvement de translation. L'essieu arrière moteur est chargé verticalement par une action $\|\vec{Q}\| = 80$ N.

Les roues, supposées à la limite du glissement par rapport au sol, entraînent le ressort par l'intermédiaire de l'engrenage. Le ressort n'entraînera le volant (V) que lorsque son couple C_R sera supérieur à C_f .

QUESTIONS

1° Calculer l'angle de torsion θ du ressort lorsque $C_f = 2 \cdot 10^{-3}$ Nm et que sa raideur

$$K = \frac{1}{3\pi} \cdot 10^{-3} \text{ Nm/rad.}$$

2° Calculer l'énergie mécanique du véhicule (énergie cinétique du volant et énergie potentielle du ressort) à la fin du lancement lorsque celui-ci s'effectue sur un tour des roues arrière.

3° Déterminer la distance x parcourue par le véhicule jusqu'à l'arrêt.

RÉPONSES

1° $\theta = 6\pi$ (trois tours).

2° $E_m = W(\vec{Q} \tan \varphi) + W(\vec{C}_f)$.

$$W(\vec{Q} \tan \varphi) = 80 \times 1 \times 2\pi = 2 \cdot 10^{-2} = 10,053 \text{ J}$$

$$W(\vec{C}_f) = -2 \cdot 10^{-3}(40 - 3)2\pi = -0,465 \text{ J}$$

$$E_m = 10,053 - 0,465 = 9,59 \text{ J}$$

3° $E_m = C_f \cdot \alpha$

α : angle balayé par le plateau (E_2) pendant la période de ralentissement, par suite $x = 2,4$ m.

EXERCICES SANS RÉPONSES

6 — Un moteur électrique entraîne un laminoir. Son arbre est solidaire d'un volant d'inertie (S) de rayon $r = 1$ m, dont la masse $M = 500$ kg est supposée répartie sur la jante (figure 15) :

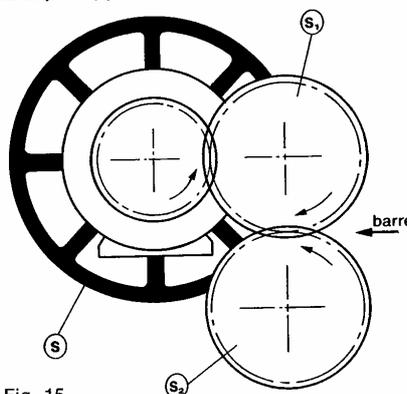


Fig. 15

L'arbre moteur entraîne en rotation, en sens inverse, les deux cylindres (S_1) et (S_2) du laminoir, par l'intermédiaire d'engrenages.

Soit $K = \frac{2}{3}$ le rapport des vitesses de rotation entre les cylindres et l'arbre moteur.

Soit $I = 10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ le moment d'inertie des cylindres par rapport à leur axe de rotation. Les différentes liaisons sont supposées parfaites.

QUESTIONS

1° Déterminer l'inertie équivalente du volant d'inertie et des cylindres, rapportée à l'arbre moteur du laminoir.

2° Pendant la phase de démarrage du laminoir. Le moteur exerce un couple de moment constant $C_0 = 160 \text{ mN}$.

Déterminer au bout de combien de temps le moteur aura atteint sa vitesse angulaire de fonctionnement de 600 tr/min.

3° A l'instant où l'on engage une barre la vitesse angulaire du moteur est de 600 tr/min. Lorsque la barre est passée à travers le laminoir, cette vitesse n'est plus que de 450 tr/min.

Déterminer le travail exigé par cette opération, sachant qu'elle a duré 1,5 seconde, et que le moteur a développé une puissance constante de 10 kW.

7 — Considérons le mécanisme plan de commande d'une tige par excentrique représenté figure 16.

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère galiléen lié au bâti (Σ). On désigne par $\vec{g} = -g\vec{y}$ l'accélération de la pesanteur. L'excentrique (S) de masse m est assimilé à un disque de centre d'inertie C, de rayon a . (S) a une liaison pivot sans frottement d'axe (O, \vec{z}) avec (Σ). Soit $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ un repère lié à (S) tel que $\vec{OC} = e\vec{x}_1$ ($0 < e < a$).

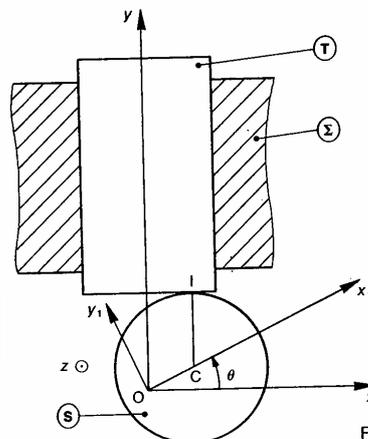


Fig. 16

On pose $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_1)$, avec $\theta = \omega t$ et ω constante positive.

La tige (T), de masse M , a une liaison glissière sans frottement d'axe (O, \vec{y}) avec (Σ).

(S) et (T) sont en contact ponctuel avec frottement (coefficient de frottement f) en un point I de la section droite extrême de la tige.

QUESTIONS

1° Déterminer le vecteur vitesse de glissement au point I de (S) par rapport à (T).

2° Déterminer le travail perdu par frottement par les actions mutuelles entre (S) et (T) pendant un tour de l'excentrique.

3° Déterminer l'expression, en fonction du temps, du moment du couple moteur qui entraîne en rotation (S) à vitesse angulaire constante. Conclusion.

8 — La figure 17 définit les différents éléments constituant le tour vertical BERTHIEZ à commande numérique.

Le bloc porte-outil est fixé à l'extrémité du coulant. Le programme d'usinage définit pour chaque opération le contrat de phase (choix de l'outil, vitesse de coupe, avance par tour, longueur d'usinage...). Lorsqu'une opération s'achève, le coulant et le porte-outil se déplacent d'un mouvement de translation rectiligne vers le magasin. Un dispositif libère le porte-outil et vient le ranger dans le bloc qui lui est réservé.

La présélection commande alors la rotation d'axe vertical du magasin, la liaison entre le nouveau porte-outil et le coulant s'effectue.

Le mouvement de retour du coulant vers le magasin a une amplitude de 1,4 m et comporte 3 phases :

Phase 1 : Mouvement uniformément accéléré. En deux secondes le coulant atteint la vitesse de 3,6 m/min.

Phase 2 : Mouvement uniforme.

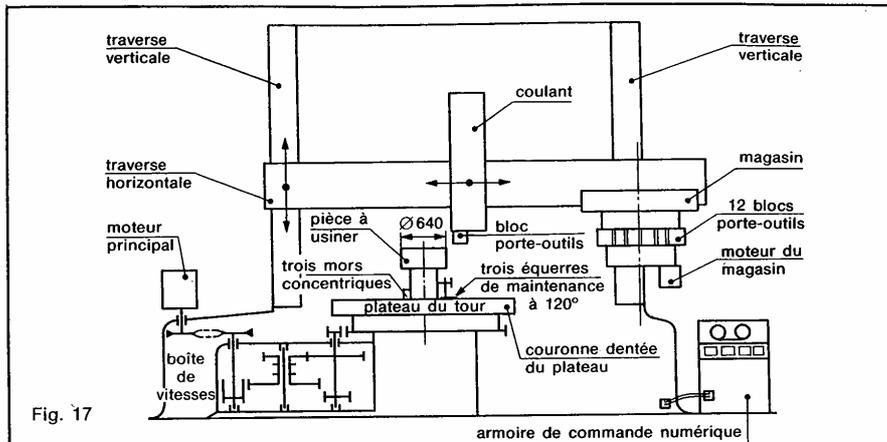


Fig. 17

Phase 3: Mouvement uniformément retardé sur 0,2 m.

La masse du coulant est $m_1 = 2000$ kg celle du porte-outil $m_2 = 20$ kg. Le coefficient de frottement entre le coulant et la traverse est $f = 0,1$.

Un bloc porte-outil vient d'être reposé dans le magasin. Le programme d'usinage demande l'utilisation du bloc porte-outil situé à côté, mais le moteur ne fonctionnant que dans un seul sens, oblige une rotation de 330° du magasin. Le rapport de transmission de l'engrenage {pignon moteur, couronne du magasin} est $i = 0,1$. Chaque porte-outil est assimilable, au point de vue de son inertie à un cylindre plein de diamètre $d = 180$ mm, de hauteur $h = 200$ mm et de masse volumique $\rho = 7800$ kg/m³. Le magasin peut contenir douze porte-outils régulièrement répartis sur un cercle de rayon $R = 610$ mm, son moment d'inertie, lorsqu'il est vide, par rapport à son axe de rotation est $J_M = 50$ kg·m².

QUESTIONS

1° Déterminer la puissance nécessaire pour chacune des phases de translation du coulant.

2° Déterminer le couple nécessaire au niveau du moteur du magasin pour que la mise en vitesse se fasse en 1,44 s sur un angle de rotation de 30° . On supposera que le couple moteur est constant pendant cette phase du mouvement et que les frottements dans les liaisons introduisent un rendement $\eta = 0,9$.

9 — On se propose d'étudier le comportement dynamique d'une ligne d'arbres sur laquelle est installé un embrayage (figure 18).

Soit $R(O, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ un repère galiléen lié au carter du moteur et du récepteur, l'axe (O, \bar{x}) étant confondu avec l'axe de rotation des arbres.

Données

Arbre moteur :

- Liaison pivot parfaite avec le carter du moteur.
- I_m : moment d'inertie par rapport à l'axe (O, \bar{x}) (pièces entraînées en rotation comprises).
- ω_m : vitesse de rotation par rapport à R.
- C_m : moment du couple exercé par le moteur.

Arbre récepteur :

- Liaison pivot parfaite avec le carter du récepteur.
- I_r : moment d'inertie par rapport à l'axe (O, \bar{x}) (pièces entraînées en rotation comprises).
- ω_r : vitesse de rotation par rapport à R.
- C_r : moment du couple exercé par le récepteur.

ω_m , ω_r , C_m et C_r sont des fonctions du temps t . Soit C_g le moment du couple maximum que peut transmettre l'embrayage. C_g est fonction de la construction et du réglage de l'embrayage, on le considérera donc comme connu et constant.

QUESTIONS

1° Déterminer l'accélération angulaire de chaque arbre au moment de l'embrayage, en fonction de C_m , C_r et C_g .

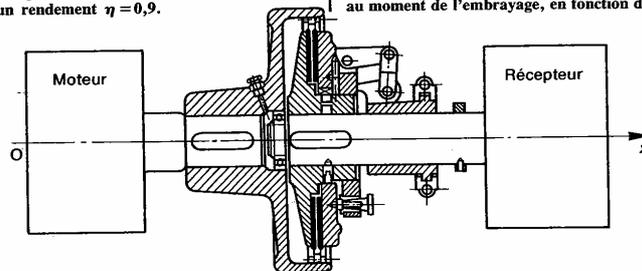


Fig. 18

2° Déterminer la durée T de la phase de glissement de l'embrayage, si on admet qu'au cours de cette période C_m et C_r sont constants, et qu'à la date $t=0$: $\omega_r=0$ et $\omega_m=\Omega$ ($\Omega > 0$).

3° Tracer le graphe des fonctions $\omega_m(t)$ et $\omega_r(t)$ pendant cette phase de glissement, dans le cas où $C_x > C_m > C_r$.

4° Tracer le graphe de la fonction $T(C_x)$.

5° En déduire la valeur minimum de C_x pour que la solidarisation des arbres puisse avoir lieu.

6° Déterminer l'énergie dissipée par frottement dans l'embrayage pendant la phase de glissement.

7° Applications numériques :

$I_m = 6 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$; $I_r = 4 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$; $C_m = 1200 \text{ mN}$;
 $C_r = 600 \text{ mN}$; $\Omega = 1800 \text{ tr/min}$.

Premier cas : $C_x = 1750 \text{ mN}$ (embrayage « dur »).

Deuxième cas : $C_x = 990 \text{ mN}$ (embrayage « mou »).

10 — L'étude concerne le dispositif de transmission de puissance, d'un mouvement longitudinal de table de machine-outil à commande numérique (figure 19).

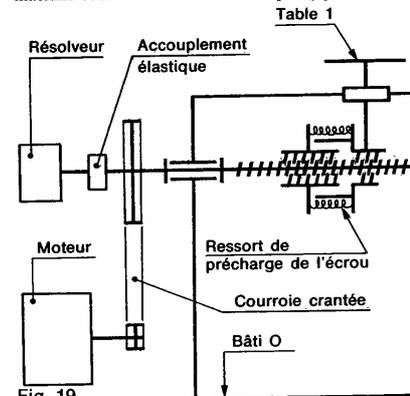


Fig. 19

La table (1) en liaison glissière G avec le bâti (0) est entraînée par un système vis-écrou. L'écrou est sans jeu grâce à un système de précharge axiale.

La vis de commande fait l'objet d'une liaison pivot P avec le bâti. Cette liaison est réalisée par deux roulements à galets coniques préchargés. La vis entraîne également le résolveur par un accouplement élastique. Elle reçoit le mouvement du moteur par une transmission à courroie crantée, dont le rapport de réduction est $K = \frac{1}{5}$. Le démarrage du moteur électrique jusqu'à sa mise en rotation uniforme nécessite un intervalle de temps t_d . Le but de l'étude est d'évaluer le déplacement de la table pendant cette période transitoire pour prévoir un dégagement, avant le mouvement uniforme opérationnel de la table.

Données

- Précharge axiale de l'écrou : $\|\vec{F}_e\| = 2500 \text{ N}$.
- Caractéristiques de la vis :
 - diamètre nominal = 16 mm;
 - diamètre moyen = 15 mm;

- pas $p = 2 \text{ mm}$ (un filet à droite);
- angle d'inclinaison du flanc du filet : $\beta = 15^\circ$;
- coefficient de frottement du contact vis/écrou : $f = \text{tg } \varphi = 0,08$;

— Inertie des éléments entraînés :

- $M = 100$ kilogrammes : masse de tout l'équipement lié à la table et entraîné dans sa translation;
- $J_1 = 1500 \text{ g}\cdot\text{cm}^2$: moment d'inertie par rapport à l'axe moteur de tout l'équipement tournant porté par l'arbre moteur;
- $J_2 = 600 \text{ g}\cdot\text{cm}^2$: moment d'inertie par rapport à l'axe de la vis de tout l'équipement tournant porté par l'axe de la vis.

— Cycle de démarrage du moteur électrique (courbe caractéristique figure 20) :

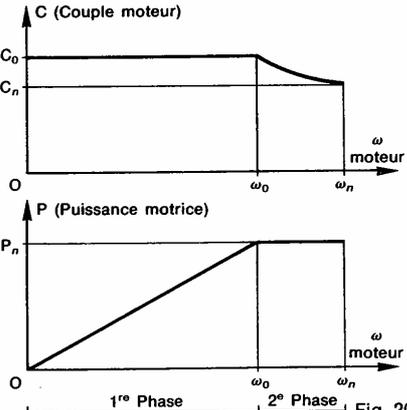


Fig. 20

- Première phase : fonctionnement du moteur à couple constant : $C_0 = 90 \text{ cmN}$.
- Deuxième phase : fonctionnement du moteur à puissance motrice constante : $P_n = 240 \text{ W}$ (puissance nominale).

Hypothèses

- Liaison glissière G et liaison pivot P parfaites.
- Pertes dans la transmission par courroie et entraînement du résolveur négligées.

QUESTIONS

- 1° Déterminer le moment C_r du couple résistant de l'action mécanique de l'écrou sur la vis.
- 2° Déterminer le moment d'inertie équivalent I de la chaîne cinématique, rapporté à l'arbre moteur.
- 3° Déterminer la vitesse de rotation ω_0 du moteur à la fin de la première phase de démarrage.
- 4° Déterminer la durée t_1 de la première phase et l'angle de rotation de l'arbre moteur θ_1 correspondant.
- 5° Déterminer la durée t_2 de la deuxième phase et l'angle de rotation de l'arbre moteur θ_2 correspondant, sachant que $t_2 = \frac{2}{3} t_1$, et que la vitesse de translation de la table, à la fin de cette phase, est de 1200 mm/min .
- 6° En déduire la durée totale t_d de la phase de démarrage, et le déplacement de la table pendant cette période transitoire.